Άσκηση 40

i) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x-2)e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α΄) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x - 2 = 2e^{-x}$ (1) έχει ακριβώς μία ρίζα x_0, με $x_0 \in (2,3)$.

ii) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = e+1$ και $\dfrac{2xf(x) + x^2 f'(x)}{e^x} = 1$ για κάθε $x > 0$.

α΄) Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x^2}$, $x > 0$

β΄) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι $f(x) \geq \dfrac{1}{x_0^2 - 2x_0}$ για κάθε $x > 0$, όπου x_0 η ρίζα της εξίσωσης (1).

γ΄) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^e ef(x)dx > 3e - 2$.

Λύση

i) α′) $g'(x) = e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	-1	$\searrow$	$-e-1$	$\nearrow$	$+\infty$

OE

$g(\mathbb{A}) = [-e-1, +\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

β′) $x - 2 = 2e^{-x} \Leftrightarrow (x-2)e^x = 2 \Leftrightarrow g(x) = 1$.

$1 \notin g((-\infty, 1]) = [-e-1, -1)$ άρα η $g(x) = 1$ δεν έχει καμία λύση στο $(-\infty, 1]$

$1 \in g((1, +\infty)) = (-e-1, +\infty)$ και g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ άρα η $g(x) = 1$ έχει μοναδική λύση x_0

g συνεχής στο $[2, 3]$ με $g(2) = -1 < 0$ και $g(3) = e^3 - 1 > 0$, άρα από Θ. Bolzano $x_0 \in (2, 3)$

ii) α′) Για $x > 0$ έχουμε $\dfrac{2xf(x) + x^2 f'(x)}{e^x} = 1 \Rightarrow (x^2 f(x))' = e^x \Rightarrow x^2 f(x) = e^x + c$

Για $x = 1$ προκύπτει $e + 1 = e + c \Rightarrow c = 1$

Άρα $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{x^2}$, $x > 0$

β′) $f'(x) = \dfrac{xe^x - 2e^x - 2}{x^3} = \dfrac{(x-2)e^x - 2}{x^3} = \dfrac{g(x) - 1}{x^3}$

x	0		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

OE

$g(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} = \dfrac{2}{x_0 - 2}$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0)$ οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0) = \dfrac{\frac{2}{x_0-2} + 1}{x_0^2} = \dfrac{x_0}{x_0^2(x_0 - 2)} = \dfrac{1}{x_0^2 - 2x_0}$

γ′) Για $x > 0$ ισχύει $e^x > x + 1 \Rightarrow f(x) > \dfrac{x+2}{x^2} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ άρα

$$\int_1^e ef(x)dx > e\int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = e\left[\ln x - \frac{2}{x}\right]_1^e = e\left(1 - \frac{2}{e} + 2\right) = 3e - 2$$