

Άσκηση 41

Δίνεται η συνάρτηση $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (2x^2 - x) \ln x - 1$, $x \geq 1$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{2x^2 - x}$, $x \geq 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_0 με $x_0 \in (1, 2)$.

Επιπλέον δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $f(e) = e^{e^2 - e}$

- $f(x) + x \ln x \cdot f'(x) = (2x^2 - x)e^{x^2 - x}$ για κάθε $x > 1$

iii) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^{x^2 - x}}{\ln x}$, $x > 1$.

iv) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

v) Να αποδείξετε ότι $(x_0 - e)(x_0 + e - 1) < \ln(\ln x_0)$.

vi) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - f(x_0)) \ln(x - x_0)]$.

Λύση

i) $g(x) = (2x^2 - x) \ln x - 1, x > 1$

η g είναι παραγωγίσιμη για $x > 1$ με

$$g'(x) = (4x - 1) \ln x + (2x^2 - x) \frac{1}{x} = (4x - 1) \ln x + 2x - 1$$

$4x - 1, \ln x, 2x - 1 > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα $g'(x) > 0$ και g είναι συνεχής στο 1 άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

$$g(A) = [g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [-1, +\infty)$$

ii) $\ln x = \frac{1}{2x^2 - x} \Leftrightarrow (2x^2 - x) \ln x = 1 \Leftrightarrow g(x) = 0$

g είναι συνεχής στο $[1, 2]$

- $g(1) = -1 < 0$
- $g(2) = 6 \ln 2 - 1 > 0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $g(x_0) = 0$ και g γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα μοναδικό.

iii) για $x > 1$ έχουμε

$$f(x) + x \ln x \cdot f'(x) = (2x^2 - x)e^{x^2-x}$$

$$\frac{1}{x} f(x) + \ln x \cdot f'(x) = \frac{(2x^2 - x)e^{x^2-x}}{x}$$

$$(\ln x)' f(x) + \ln x \cdot f'(x) = (2x - 1)e^{x^2-x}$$

$$(f(x) \cdot \ln x)' = (e^{x^2-x})' \implies f(x) \cdot \ln x = e^{x^2-x} + c$$

για $x = e$ είναι $f(e) \cdot \ln e = e^{e^2-e} + c \Leftrightarrow e^{e^2-e} = e^{e^2-e} + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $f(x) = \frac{e^{x^2-x}}{\ln x}, x > 1$

iv) Για $x > 1$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)e^{x^2-x} \ln x - e^{x^2-x} \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{e^{x^2-x} [(2x^2 - x) \ln x - 1]}{x \ln^2 x} = \frac{e^{x^2-x} g(x)}{x \ln^2 x}$$

$e^{x^2-x}, x, \ln^2 x > 0$ για $x > 1$ άρα το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της g γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και

- για $1 < x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) \Rightarrow g(x) < 0$, άρα $f'(x) < 0$
- για $x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) \Rightarrow g(x) > 0$, άρα $f'(x) > 0$

x	1	x_0	$+\infty$	
f'		-	0	+
f		↘ ↗		

OE

v) Έχουμε

$$(x_0 - e)(x_0 + e - 1) < \ln(\ln x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - e^2 - x_0 + e < \ln(\ln x_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x_0^2 - x_0}}{e^{e^2 - e}} < \ln x_0 \stackrel{x_0 > 1}{\Leftrightarrow} \frac{e^{x_0^2 - x_0}}{\ln x_0} < \frac{e^{e^2 - e}}{\ln e} \Leftrightarrow f(x_0) < f(e) \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} x_0 < e$$

το οποίο ισχύει αφού $x_0 \in (1, 2)$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) - f(x_0)) \ln(x - x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \ln(x - x_0) \right] = 0 \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \ln(x - x_0) \stackrel{u = x - x_0}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$$