

Άσκηση 42

i) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$. Να δείξετε ότι:

- $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$
- $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x) dx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(\eta\mu x) - 2}{f(-\sigma\upsilon\nu x) - 2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

β) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{e} < \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(x) dx < e^{\sqrt{2}}$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(\ln(h(x)) - \eta\mu x) \ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot \eta\mu \frac{1}{2x - \pi}$

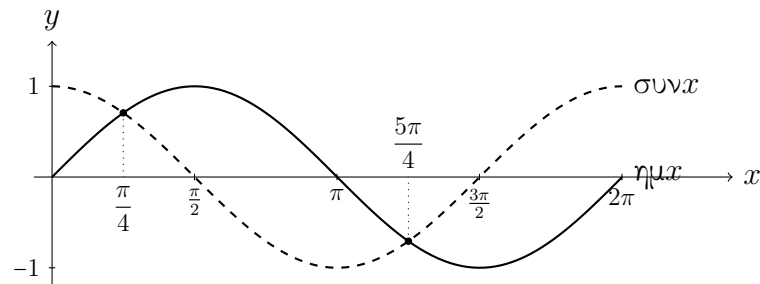
ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\int_0^1 (2h(\alpha)x - e^{\sqrt{2}}) dx}{x - 2} - \frac{\int_0^1 (2h(\beta)x - e^{-\sqrt{2}}) dx}{x + 1} = 0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-1, 2)$, όπου $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ με $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ και $\beta \neq \frac{5\pi}{4}$.

Λύση

i) Είναι $g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$



- $g(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = 1$. Στο $[0, 2\pi]$ οι λύσεις είναι $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$.
- Για $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ είναι $\eta\mu x \geq \sigma\upsilon\nu x$ άρα $g(x) \geq 0$.
- Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ είναι $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$ άρα $g(x) < 0$.

ii) α) Θέτω $c = \int_0^1 x f(x) dx \Rightarrow f(x) = e^x + c$

$$c = \int_0^1 x(e^x + c) dx = \int_0^1 x e^x dx + \int_0^1 c x dx =$$

$$\left[x e^x - e^x \right]_0^1 + \left[\frac{c x^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$c = 1 + \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

Άρα $f(x) = e^x + 2$.

$$\beta') h(x) = \frac{f(\eta\mu x) - 2}{f(-\sigma\upsilon\nu x) - 2} = \frac{e^{\eta\mu x}}{e^{-\sigma\upsilon\nu x}} = e^{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$$

$$h'(x) = e^{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = -e^{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} g(x).$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4}.$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π			
h'		+	0	-	0	+	
h	e	$e^{\sqrt{2}}$	$e^{-\sqrt{2}}$	e	e		
	TE	OM	OE	TM			

$$h(A) = [e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}]$$

γ') Θέτω $u(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi] \Rightarrow u'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = -g(x)$

$$u'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π
u'		+	0
u		$\sqrt{2}$	-1

για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει

$$-1 \leq u(x) \leq \sqrt{2} \Rightarrow e^{-1} \leq e^{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \leq e^{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{e} \leq h(x) \leq e^{\sqrt{2}}$$

και το = μόνο για $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \pi$ άρα

$$\int_0^\pi \frac{1}{e} dx < \int_0^\pi h(x) dx < \int_0^\pi e^{\sqrt{2}} dx$$

$$\frac{\pi}{e} < \int_0^\pi h(x) dx < e^{\sqrt{2}} \pi$$

$$\frac{1}{e} < \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(x) dx < e^{\sqrt{2}}$$

δ') Έχουμε

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(\ln(h(x)) - \eta\mu x) \cdot \ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot \eta\mu \frac{1}{2x - \pi}$$

$$h(x) = e^{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow \ln(h(x)) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x.$$

Θέτω $u = x - \frac{\pi}{2}$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[(\ln(h(x)) - \eta\mu x) \cdot \ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[\sigma\upsilon\nu \left(u + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \ln u \right] = \lim_{u \rightarrow 0^+} [-\eta\mu u \cdot \ln u] =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\eta\mu u}{u} \cdot (u \ln u) \right] = 0$$

διότι $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$ και $\lim_{u \rightarrow 0} (u \ln u) = 0$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει

$$l = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(\ln(h(x)) - \eta\mu x) \cdot \ln \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \cdot \eta\mu \frac{1}{2x - \pi} = 0$$

ε') Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = (x+1) \int_0^1 (2h(\alpha)x - e^{\sqrt{2}}) dx - (x-2) \int_0^1 (2h(\beta)x - e^{-\sqrt{2}}) dx$$

Η Φ είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ ως πολυωνυμική 1ου βαθμού

- Για $x = -1$ έχουμε

$$\Phi(-1) = 3 \int_0^1 (2h(\beta)x - e^{-\sqrt{2}}) dx$$

Επειδή $\beta \neq \frac{5\pi}{4}$, από το ολικό ελάχιστο της h έχουμε $h(\beta) > e^{-\sqrt{2}}$

Για κάθε $x \in (0, 1]$ ισχύει

$$2h(\beta)x > 2e^{-\sqrt{2}}x \Leftrightarrow \int_0^1 2h(\beta)x dx > \int_0^1 2e^{-\sqrt{2}}x dx = e^{-\sqrt{2}}$$

Συνεπώς $\int_0^1 (2h(\beta)x - e^{-\sqrt{2}}) dx > 0 \Rightarrow \Phi(-1) > 0$.

- Για $x = 2$ έχουμε

$$\Phi(2) = 3 \int_0^1 (2h(\alpha)x - e^{\sqrt{2}}) dx$$

Επειδή $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, από το ολικό μέγιστο της h έχουμε $h(\alpha) < e^{\sqrt{2}}$

Για κάθε $x \in (0, 1]$ ισχύει

$$2h(\alpha)x < 2e^{\sqrt{2}}x \Leftrightarrow \int_0^1 2h(\alpha)x dx < \int_0^1 2e^{\sqrt{2}}x dx = e^{\sqrt{2}}$$

Συνεπώς $\int_0^1 (2h(\alpha)x - e^{\sqrt{2}}) dx < 0 \Leftrightarrow \Phi(2) < 0$.

Επειδή $\Phi(-1) \cdot \Phi(2) < 0$, από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1, 2)$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0) = 0$ και $\Phi(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.