Άσκηση 43

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$
- $f'(x) = f(x)\left(1 + \dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

i) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη (ε) στο σημείο $M\left(0, f(0)\right)$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Για $f(x) > 0$ έχουμε

$$f'(x) = f(x)\left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow (\ln f(x))' \left(x + \ln(x^2+1)\right)'$$

Άρα από συνέπειες ΘΜΤ

$$\ln f(x) = x + \ln(x^2+1) + c$$

Για $x = 0$ προκύπτει

$$\ln f(0) = 0 + \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$$

Επομένως

$$\ln f(x) = x + \ln(x^2+1) \Rightarrow \ln f(x) = \ln\left(e^x(x^2+1)\right)$$

άρα

$$f(x) = e^x(x^2+1)\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$$

iii) $f'(x) = e^x(x^2+1) + e^x(2x) = e^x(x^2+2x+1) = e^x(x+1)^2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$f''(x) = e^x(x+1)^2 + e^x \cdot 2(x+1) = e^x(x+1)(x+1+2) = e^x(x+1)(x+3)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = -3$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\smile$		$\frown$		$\smile$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		
			$(-3, 10e^{-3})$		$B(-1, 2e^{-1})$		

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{e^{-x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(x^2+1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής είναι $f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$

iv) Η εφαπτομένη (ε) στο $M(0,1)$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = x+1$. Επειδή $f''(x) > 0$ στο $(-1,+\infty)$ η f είναι κυρτή στο $[0,1]$ οπότε $f(x) \geq x+1$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^1 (f(x) - (x+1))\,dx = \int_0^1 e^x(x^2+1)\,dx - \int_0^1 (x+1)\,dx$$

Για το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^1 e^x(x^2+1)\,dx$ έχουμε

$$I_1 = \int_0^1 (e^x)'(x^2+1)\,dx = \left[e^x(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(x^2+1)'\,dx =$$

$$2e - 1 - \int_0^1 2x(e^x)'\,dx = 2e - 1 - \left([2xe^x]_0^1 - \int_0^1 (2x)'e^x\,dx\right) =$$

$$2e - 1 - 2e + \int_0^1 2e^x\,dx = -1 + [2e^x]_0^1 = -1 + 2e - 2 = 2e - 3$$

Για το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_0^1 (x+1)\,dx$ έχουμε

$$I_2 = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Επομένως

$$E(\Omega) = I_1 - I_2 = 2e - 3 - \frac{3}{2} = 2e - \frac{9}{2}$$