Άσκηση 44

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x)-\dfrac{1}{x}=f(x)-\ln x$ για κάθε $x>0$
- $f(1)=e$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Έστω $f(x)=\ln x+e^x \ , \ x>0$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(0,x_0]$ και κυρτή στο $[x_0,+\infty)$, όπου $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

iv) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

v) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1 \ , \ x=e$.

vi) Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)(\beta-x_0)+f'(x_0)(\alpha-\beta)+f'(\beta)(x_0-\alpha)<0$, όπου $x_0<\alpha<\beta$

Λύση

i) Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f'(x) - \frac{1}{x} = f(x) - \ln x \Rightarrow (f(x) - \ln x)' = f(x) - \ln x \Rightarrow$$

$$e^{-x}(f(x) - \ln x)' - e^{-x}(f(x) - \ln x) = 0 \Rightarrow (e^{-x}(f(x) - \ln x))' = 0$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ προκύπτει

$$e^{-x}(f(x) - \ln x) = c \Rightarrow f(x) - \ln x = ce^{x}$$

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) - 0 = ce \Rightarrow c = 1$

Επομένως, $f(x) - \ln x = e^x \implies f(x) = \ln x + e^x \ , \ x > 0.$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x + e^x) = -\infty + 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x + e^x) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

οπότε $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

iii) Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + e^x\right)' = \frac{2}{x^3} + e^x$$

Είναι $f'''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Η f'' είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ και

- $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4 + \sqrt{e} < 0$
- $f''(1) = -1 + e > 0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$ και επειδή η f'' είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

για $0 < x < x_0 \overset{f''\text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$

για $x > x_0 \overset{f''\text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0$

x	0		x_0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

Σ.Κ.

iv) Αφού f γνησίως αύξουσα τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο

Έστω $\Delta = \left(0, \dfrac{1}{3}\right]$, τότε

$$f(\Delta) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left(-\infty, \ln\frac{1}{3} + e^{1/3}\right]$$

Όμως $e^{1/3} \approx 1,39$ και $\ln 3 \approx 1,09$ Επειδή $f\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx 1,39 - 1,09 = 0,3 > 0$, το $0 \in f(\Delta)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

v) Για $x \in [1, e]$, $f(x) = \ln x + e^x > 0$ άρα

$$E(\Omega) = \int_1^e (\ln x + e^x)\, dx = \int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e e^x\, dx = 1 + e^e - e$$

αφού

$$\int_1^e \ln x\, dx = \Big[x \ln x\Big]_1^e - \int_1^e 1\, dx = e - (e - 1) = 1$$

$$\int_1^e e^x\, dx = \Big[e^x\Big]_1^e = e^e - e$$

vi)

$$f'(\alpha)(\beta - x_0) + f'(x_0)(\alpha - \beta) + f'(\beta)(x_0 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\alpha)(\beta - x_0) - f'(x_0)(\beta - \alpha) - f'(\beta)(\alpha - x_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\alpha)(\beta - \alpha + \alpha - x_0) - f'(x_0)(\beta - \alpha) - f'(\beta)(\alpha - x_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\alpha)(\beta - \alpha) + f'(\alpha)(\alpha - x_0) - f'(x_0)(\beta - \alpha) - f'(\beta)(\alpha - x_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(f'(\alpha) - f'(x_0))(\beta - \alpha) - (f'(\beta) - f'(\alpha))(\alpha - x_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(f'(\alpha) - f'(x_0))(\beta - \alpha) < (f'(\beta) - f'(\alpha))(\alpha - x_0) \underset{\alpha - x_0 > 0}{\overset{\beta - \alpha > 0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{f'(\alpha) - f'(x_0)}{\alpha - x_0} < \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

ΘΜΤ για την f' στο $[x_0, \alpha]$ και στο $[\alpha, \beta]$ $\Rightarrow$ υπάρχουν $\xi_1 \in (x_0, \alpha)$ και $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\alpha) - f'(x_0)}{\alpha - x_0} \text{ και } f''(\xi_2) = \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

άρα

$$f''(\xi_1) < f''(\xi_2) \overset{f'' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2$$

που ισχύει