Άσκηση 45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(4^x - 1) - \ln(2^x + 1)\ ,\ x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να βρείτε τα όρια:

α′) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$.

β′) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{ημ}^2(x-1)}{\ln x \cdot f(x)}$.

γ′) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\text{ημ}\dfrac{1}{x}\right)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^2 \ln 2 f(x)dx < \ln\frac{e^2}{4}$.

iv) Να δείξετε ότι:

α′) $f(x) \geq \ln 3 \cdot (x-1)$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

β′) $\dfrac{\ln 3}{2} < E(\Omega) < \ln 2$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

v) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f(\xi) = \sqrt[3]{f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{4}{3}\right)\cdot f\left(\frac{5}{4}\right)}$.

vi) Να δείξετε ότι $\left|f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| \geq \sqrt{f(\alpha)f(\beta)}$, όπου $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$.

Λύση

i) Για $x > 0$ έχουμε

$$f(x) = \ln(4^x - 1) - \ln(2^x + 1) = \ln\left(\frac{4^x - 1}{2^x + 1}\right) = \ln\left(\frac{(2^x - 1)(2^x + 1)}{2^x + 1}\right) = \ln(2^x - 1)$$

$$f'(x) = (\ln(2^x - 1))' = \frac{(2^x - 1)'}{2^x - 1} = \frac{2^x \ln 2}{2^x - 1}$$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$f''(x) = \ln 2 \cdot \frac{(2^x \ln 2)(2^x - 1) - 2^x(2^x \ln 2)}{(2^x - 1)^2} = -\frac{2^x(\ln 2)^2}{(2^x - 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(2^x - 1) \overset{u = 2^x - 1}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(2^x - 1) = +\infty$

άρα $f(A) = \mathbb{R}$

ii) α′)

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(2^x - 1) - \ln e^x) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2^x - 1}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left(\frac{2}{e}\right)^x - \frac{1}{e^x}\right) \overset{u = \left(\frac{2}{e}\right)^x - \frac{1}{e^x}}{=} \lim_{u\to 0} = -\infty$$

διότι $\dfrac{2}{e} < 1$

β′)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{ημ}^2(x-1)}{\ln x \cdot f(x)} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{\text{ημ}(x-1)}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{x-1}{\ln x} \cdot \frac{x-1}{f(x)} = 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}$$

διότι

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{\ln 4}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = 1$

γ′) $\left|\dfrac{1}{f(x)}\text{ημ}\dfrac{1}{x}\right| \le \dfrac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|f(x)|} \le \dfrac{1}{f(x)}\text{ημ}\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{|f(x)|}$

και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|f(x)|} = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\text{ημ}\dfrac{1}{x}\right) = 0$

iii) Ισχύει

$$\ln x \le x - 1 \overset{x = 2^x - 1}{\Rightarrow} \ln(2^x - 1) \le (2^x - 1) - 1 \Rightarrow f(x) \le 2^x - 2$$

και το = μόνο για $2^x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ άρα

$$f(x) < 2^x - 2 \Rightarrow \ln 2 \cdot f(x) < \ln 2 \cdot (2^x - 2)$$

$$\int_1^2 \ln 2 f(x) dx < \int_1^2 (2^x \ln 2 - 2\ln 2) dx = \Big[2^x - 2x\ln 2\Big]_1^2 = 2 - 2\ln 2 = \ln \frac{e^2}{4}$$

iv) α′) Θέτω $g(x) = f(x) - \ln 3 \cdot (x-1)$, $x \in [1,2]$

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $g'(x) = f'(x) - \ln 3$ και

- $g(1) = f(1) = 0$
- $g(2) = f(2) - ln3 = 0$

άρα από Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2) : g'(x_0) = 0$

Είναι $g''(x) = f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$ άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

- Για $1 \le x < x_0$ έχουμε $g'(x) > g'(x_0) = 0$ άρα g γνησίως αύξουσα
- Για $x_0 < x \le 2$ έχουμε $g'(x) < g'(x_0) = 0$ άρα g γνησίως φθίνουσα

x	1		x_0		2
g'		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	0

άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0 για $x = 1$ και $x = 2$, οπότε $g(x) \ge 0$ για κάθε x και το = για $x = 1$ και $x = 2$, οπότε $f(x) \ge \ln 3 \cdot (x-1)$ για κάθε $x \in [1,2]$

β′) $f(x) = 0 \Rightarrow \ln(2^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ και

για $x \ge 1 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \ge f(1) = 0$

άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$ είναι

$$E(\Omega) = \int_1^2 |f(x)|\, dx = \int_1^2 f(x)\, dx$$

Ισχύει $f(x) \ge \ln 3 \cdot (x-1)$ και το = μόνο για $x = 0$ ή $x = 1$ άρα

$$E(\Omega) > \int_1^2 \ln 3 \cdot (x-1)\, dx = \ln 3 \cdot \left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln 3}{2}$$

Εφαπτομένη στο $x_0 = 1$: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = (2\ln 2)(x-1)$

f κοίλη στο $(0,+\infty) \Rightarrow f(x) \le (2\ln 2)(x-1)$ και το $=$ μόνο για $x=1$, άρα

$$E(\Omega) = \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 (2\ln 2)(x-1)dx = 2\ln 2\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2 = \ln 2$$

οπότε $\dfrac{\ln 3}{2} < E(\Omega) < \ln 2$

v) Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$ και f γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{5}{4} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} &\Leftrightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)\\
\frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2} &\Leftrightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{4}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)\\
\frac{5}{4} < \frac{3}{2} = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, έχουμε

$$f^3\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{4}{3}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right) < f^3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) < \sqrt[3]{f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{4}{3}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)} < f\left(\frac{3}{2}\right)$$

f συνεχής στο $\left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$ και $f\left(\frac{5}{4}\right) < \sqrt[3]{f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{4}{3}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)} < f\left(\frac{3}{2}\right)$ άρα από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in \left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right) \subseteq (1,2) : f(\xi) = \sqrt[3]{f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot f\left(\frac{4}{3}\right)\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)}$ και f γνησίως αύξουσα, άρα ξ μοναδικό

vi) Για $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$

Αν $\alpha = \beta$, η σχέση ισχύει ως ισότητα: $|f(\alpha)| = \sqrt{f(\alpha)f(\alpha)}$

Για $\alpha \ne \beta$ χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $\alpha < \beta$. Η ζητούμενη σχέση γίνεται:

$$\left|f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| \ge \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \Leftrightarrow f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)f(\beta) \overset{f(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\ln\left(f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) > \ln(f(\alpha)f(\beta)) \Leftrightarrow 2\ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln f(\alpha) + \ln f(\beta)$$

$$\ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \ln f(\alpha) > \ln f(\beta) - \ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \ln f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{\ln f(\beta) - \ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ για $x \in (1,+\infty)$

Είναι $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ και $g''(x) = \dfrac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} < 0$ για κάθε $x > 1$ αφού στο $(1, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$ και $f''(x) < 0$

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την g στα διαστήματα $\left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$

- υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_1) = \dfrac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$
- υπάρχει $\xi_2 \in \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = \dfrac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Η σχέση (1) γίνεται:

$$g'(\xi_1) > g'(\xi_2) \overset{g' \text{ γν. φθιν.}}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2$$

που ισχύει