

Άσκηση 46

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x) \cdot x - f(x) = 2x^2 e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(0) = 1$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iv) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) \ln \left(-\frac{1}{x} \right) \right)$.

v) α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $K = \int_0^1 f(x) dx$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (-1, 0)$ ώστε να ισχύει

$$2f'(\xi) = \frac{3 \left(\int_0^1 f(x) dx \right) f'(-1) - 2 \left(\int_0^{-1} f(x+1) dx \right) f'(0)}{e^2 + 1}.$$

Λύση

i) $f'(x) \cdot x - f(x) = 2x^2 e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα για $x = 0$ προκύπτει $f(0) = 0$

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$f'(x)x - f(x) = 2x^2 e^{2x} \Rightarrow \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 2e^{2x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^{2x})'$$

άρα από τις συνέπειες ΘΜΤ

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} e^{2x} + c_1 & , x > 0 \\ e^{2x} + c_2 & , x < 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ οπότε $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x} + c_1) = 1 + c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x} + c_2) = 1 + c_2$$

Αφού $f'(0) = 1$ προκύπτει $1 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0$ και $1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 0$.

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ xe^{2x} & , x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = xe^{2x} , x \in \mathbb{R}$$

ii) $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(2x + 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$



x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -\frac{1}{2}$ το $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$

Το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

iii) $f''(x) = 2e^{2x}(2x + 1) + 2e^{2x} = 4e^{2x}(x + 1)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

Σ.Κ.

Η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(-1, -e^{-2})$

iv)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) \ln \left(-\frac{1}{x} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x e^{2x}}{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x} \ln \left(-\frac{1}{x} \right) \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x e^{2x}}{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x} \ln \left(-\frac{1}{x} \right) \right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 e^{2x}) \cdot \left(-\frac{1}{x} \ln \left(-\frac{1}{x} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 e^{2x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^2}{e^{-2x}} \right) \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x}{-2e^{-2x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{-2x}} \right) \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{-2e^{-2x}} \right) = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} \ln \left(-\frac{1}{x} \right) \stackrel{u = -\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (u \ln u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0$$

$$v) \quad \alpha) \quad K = \int_0^1 x e^{2x} dx = \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$\beta) \quad I = \int_0^{-1} f(x+1) dx \stackrel{u = x+1}{=} \int_1^0 f(u) du = -K$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε

$$2f'(\xi) = \frac{3 \left(\int_0^1 f(x) dx \right) f'(-1) - 2 \left(\int_0^{-1} f(x+1) dx \right) f'(0)}{e^2 + 1} =$$

$$\frac{K(3f'(-1) + 2f'(0))}{e^2 + 1} \stackrel{f'(-\frac{1}{2})=0}{=} \frac{e^2 + 1}{4} (3f'(-1) + 2f'(0) + 3f'(-\frac{1}{2})) =$$

$$\frac{3f'(-1) + 2f'(0) + 3f'(-\frac{1}{2})}{8}$$

$f''(x) = 4e^{2x}(x+1) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ και συνεχής στο $[-1, 0]$ άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, έστω m και M αντίστοιχα. Τότε για κάθε $x \in [-1, 0]$ ισχύει

$$m = f'(-1) \leq f'(x) \leq f'(0) = M$$

- για $x = -1$: $m = f'(-1) < M \Rightarrow 3m = 3f'(-1) < 3M$
- για $x = -\frac{1}{2}$: $m < f'(-1/2) < M \Rightarrow 3m < 3f'(-1/2) < 3M$
- για $x = 0$: $m < f'(0) = M \Rightarrow 2m < 2f'(0) = 2M$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$8m < 3f'(-1) + 3f'(-1/2) + 2f'(0) < 8M$$

$$m < \frac{3f'(-1) + 3f'(-1/2) + 2f'(0)}{8} < M$$

Το $\lambda = \frac{3f'(-1) + 3f'(-1/2) + 2f'(0)}{8} \in (m, M)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda$ και f' γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, άρα ξ μοναδικό

Semper in corde



01.04.2026