

Άσκηση 47

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(x) \cdot f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x \neq 0$
- $f(0) = 0$
- $f(\alpha) > 0$, όπου $\alpha > 0$, $f(\beta) > 0$, όπου $\beta < 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο $[-1, 1]$.

iii) α') Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

β') Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_1^2 f(x)e^{x^2+x}(2x+1)dx = (e^6 - e^2)f(\xi).$$

v) Να βρείτε τα όρια:

α') $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu x \right).$

β') $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) + 1} + 5 - f(x)}{f(x) + \sqrt{4 + 3f^2(x)}}.$

γ') $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|f^2(x) - 5f(x)| + f(x)}{f^2(x) - 3f(x) + 2} - f(x)\eta\mu \frac{1}{f(x)} \right).$

Λύση

i) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε

$$f(x) \cdot f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow (f^2(x))' = (\ln(x^2 + 1))'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ

$$f^2(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) + c_1 & , x < 0 \\ \ln(x^2 + 1) + c_2 & , x > 0 \end{cases}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και $f(0) = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f^2(x) = f^2(0) \Rightarrow \ln 1 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^2(x) = f^2(0) \Rightarrow \ln 1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα $f^2(x) = \ln(x^2 + 1)$ για κάθε $x \neq 0 \Rightarrow |f(x)| = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$

$\sqrt{\ln(x^2 + 1)} \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ και συνεχής, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$

Αφού $f(\alpha) > 0$ για $\alpha > 0$ και $f(\beta) > 0$ για $\beta < 0$ προκύπτει $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ οπότε

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln(x^2 + 1)} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)} , x \in \mathbb{R}$$

ii) Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως σύνθεση συνεχών

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}}$$

$$\text{Θέτω } u = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 + 1} = 1$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}}$$

$$\text{Θέτω } u = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + 1} = 1$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}} = \lim_{u \rightarrow 1} -\sqrt{u} = -1$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[-1, 1]$.

iii) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(-x) = \sqrt{\ln((-x)^2 + 1)} = \sqrt{\ln(x^2 + 1)} = f(x)$$

άρα η f είναι άρτια

β) Για κάθε $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f'(x) = \left(\sqrt{\ln(x^2 + 1)} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2 + 1)}} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-		+
f	$+\infty$	\swarrow 0 \searrow	$+\infty$

OE
 $f(0) = 0$

iv) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ άρα από Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in [1, 2]$ να ισχύει

$$f(1) = m \leq f(x) \leq M = f(2)$$

Θέτω $g(x) = e^{x^2+x} \Rightarrow g'(x) = e^{x^2+x}(2x+1) > 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$

$$m \cdot g'(x) \leq f(x)g'(x) \leq M \cdot g'(x)$$

και το = ισχύει μόνο για $x = 1$ και $x = 2$ αντίστοιχα, άρα

$$\int_1^2 m g'(x) dx < \int_1^2 f(x) g'(x) dx < \int_1^2 M g'(x) dx$$

$$m [g(x)]_1^2 < \int_1^2 f(x) g'(x) dx < M [g(x)]_1^2$$

$$m(e^6 - e^2) < \int_1^2 f(x)g'(x)dx < M(e^6 - e^2)$$

$$m < \frac{\int_1^2 f(x)e^{x^2+x}(2x+1)dx}{e^6 - e^2} < M$$

Ο αριθμός $\lambda = \frac{\int_1^2 f(x)e^{x^2+x}(2x+1)dx}{e^6 - e^2} \in (m, M)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \lambda \Rightarrow \int_1^2 f(x)e^{x^2+x}(2x+1)dx = (e^6 - e^2)f(\xi)$$

$$\alpha') \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\ln(x^2+1)} = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$ από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot \eta\mu x \right) = 0$$

β')

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{f^2(x)+1}+5-f(x)}{f(x)+\sqrt{4+3f^2(x)}} \stackrel{u=f(x)}{x \rightarrow -\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u^2+1}+5-u}{u+\sqrt{4+3u^2}} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}-u+5}{u+\sqrt{u^2\left(\frac{4}{u^2}+3\right)}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}-u+5}{u+u\sqrt{\frac{4}{u^2}+3}} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u\left(\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}-1+\frac{5}{u}\right)}{u\left(1+\sqrt{\frac{4}{u^2}+3}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}-1+0}{1+\sqrt{0+3}} = 0$$

γ')

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|f^2(x)-5f(x)|+f(x)}{f^2(x)-3f(x)+2} - f(x)\eta\mu \frac{1}{f(x)} \right) = 1-1=0$$

αφού

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^2(x) - 5f(x)| + f(x)}{f^2(x) - 3f(x) + 2} \stackrel{u=f(x)}{\underset{x \rightarrow -\infty}{\underset{u \rightarrow +\infty}}{=}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{|u^2 - 5u| + u}{u^2 - 3u + 2} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2 - 4u}{u^2 - 3u + 2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{u^2} = 1$$

διότι $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 - 5u = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 = +\infty$ άρα $u^2 - 5u > 0$ κοντά στο $+\infty$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(u \cdot \eta \mu \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} \stackrel{t = \frac{1}{u}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu t}{t} = 1$$