

Άσκηση 48

Δίνεται $f(x) = 2e^{x^3} + x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- ii) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μοναδικό σημείο τομής με τετμημένη $x_0 \in (-1, 0)$.
- iii) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.
- iv) Έστω F αρχική της f στο $[0, +\infty)$ με $F(0) = -1$.
 - α') Να δείξετε ότι F κυρτή στο $[0, +\infty)$.
 - β') Να δείξετε ότι $F(\xi) = 0$ για $\xi \in (0, +\infty)$.
- v) Να υπολογίσετε τα όρια:
 - α') $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{F(x)} \cdot \eta\mu x \right)$.
 - β') $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)}{\eta\mu(x-1)}$.
- vi) Να λυθεί η εξίσωση $F(|x| + 1) + F(3|x| + 1) = 2F(2|x| + 1)$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 6x^2e^{x^3} + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται

$$D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R} \text{ αφού}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x^3} + x^3 + x - 1) = 0 + (-\infty) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x^3} + x^3 + x - 1) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ii) Έστω $M(x, y)$ ένα κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} , τότε

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$f(x) + x = f(y) + y \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

- $f(x_1) < f(x_2)$ και
- $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και 1-1

Η σχέση (1) γράφεται

$$h(x) = h(y) \stackrel{h^{-1}}{\Leftrightarrow} x = y$$

οπότε

$$f(x) = y \stackrel{y=x}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow 2e^{x^3} + x^3 + x - 1 = x \Leftrightarrow 2e^{x^3} + x^3 - 1 = 0$$

Θέτω $g(x) = 2e^{x^3} + x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$

η g είναι συνεχής στο $[-1, 0]$

- $g(-1) = \frac{2}{e} - 2 < 0$
- $g(0) = 1 > 0$

άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$ και

$g'(x) = 6x^2e^{x^3} + 3x^2 = 3x^2(2e^{x^3} + 1) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$. Επειδή g συνεχής, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα x_0 μοναδικό

iii) $f''(x) = 12xe^{x^3} + 18x^4e^{x^3} + 6x > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

iv) α') $F'(x) = f(x)$, $x \in [0, +\infty)$ και η $F' = f$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα η F είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$

β') Για $x \geq 0 \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq 1 \Rightarrow F'(x) \geq 1 > 0$

άρα F γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Είναι $F([0, +\infty)) = [F(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)) = [-1, +\infty)$ διότι

$F(x) \geq F'(0)(x-0) + F(0) = f(0)x + F(0) = x - 1$ για κάθε $x \geq 0$ και το = μόνο για $x = 0$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

Το $0 \in F([0, +\infty))$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, +\infty)$ ώστε $F(\xi) = 0$ και F γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα ξ μοναδικό ($\xi \neq 0$ διότι $F(0) = -1 \neq F(\xi)$)

v) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{F(x)} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{f(x)} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(6x^2e^{x^3} + 3x^2 + 1)} = 0$$

$$\left| \frac{x \ln x}{F(x)} \cdot \eta\mu x \right| = \left| \frac{x \ln x}{F(x)} \right| \cdot |\eta\mu x| \leq \left| \frac{x \ln x}{F(x)} \right|$$

άρα

$$-\left| \frac{x \ln x}{F(x)} \right| \leq \frac{x \ln x}{F(x)} \cdot \eta\mu x \leq \left| \frac{x \ln x}{F(x)} \right|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x \ln x}{F(x)} \right| = 0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \ln x}{F(x)} \cdot \eta\mu x \right) = 0$$

vi) $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)}{\eta\mu(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\eta\mu(x-1)} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x-1} \stackrel{f^{-1}(x) = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u-0}{f(u) - f(0)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(u) - f(0)}{u-0}} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\eta\mu(x-1)} \stackrel{k = x-1}{=} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\eta\mu k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu k}{k}} = 1$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x)}{\eta\mu(x-1)} = 1 \cdot 1 = 1$$

vii) Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F(|x| + 1) + F(3|x| + 1) = 2F(2|x| + 1)$$

$$F(3|x| + 1) - F(2|x| + 1) = F(2|x| + 1) - F(|x| + 1) \quad (1)$$

Προφανής ρίζα το $x = 0$ αφού $F(1) - F(1) = F(1) - F(1)$ ισχύει

Για $x \neq 0$ είναι $|x| > 0$ οπότε $|x| + 1 < 2|x| + 1 < 3|x| + 1$

Από ΘΜΤ για την F στα διαστήματα $[|x| + 1, 2|x| + 1]$ και $[2|x| + 1, 3|x| + 1]$ έχουμε ότι

- υπάρχει $\xi_1 \in (|x| + 1, 2|x| + 1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2|x| + 1) - F(|x| + 1)}{(2|x| + 1) - (|x| + 1)} \Rightarrow f(\xi_1) = \frac{F(2|x| + 1) - F(|x| + 1)}{|x|}$$

- υπάρχει $\xi_2 \in (2|x| + 1, 3|x| + 1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_2) = \frac{F(3|x| + 1) - F(2|x| + 1)}{(3|x| + 1) - (2|x| + 1)} \Rightarrow f(\xi_2) = \frac{F(3|x| + 1) - F(2|x| + 1)}{|x|}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 &\stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow \\ \frac{F(2|x| + 1) - F(|x| + 1)}{|x|} &< \frac{F(3|x| + 1) - F(2|x| + 1)}{|x|} \Leftrightarrow \\ F(2|x| + 1) - F(|x| + 1) &< F(3|x| + 1) - F(2|x| + 1) \end{aligned}$$

άρα η (1) είναι αδύνατη για $x \neq 0$, οπότε $x = 0$ μοναδική ρίζα.