

Άσκηση 49

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \beta x + 1 & , x \leq 0 \\ \ln(x+1) + \alpha & , x > 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

- i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g .
- ii) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$.

Έστω $\alpha = 1$ και $\beta = 1$

- iii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.
- iv) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες $x_1 \in (-2, -1)$ και $x_2 \in (0, 1)$.
- v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (-2, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = 2$.
- vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-2, 1)$ τέτοια, ώστε $\frac{1}{f''(\xi_1)} + \frac{1}{2f''(\xi_2)} = -1$.

Λύση

i) $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Άρα η $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Άρα η $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

ii) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει αρχικά να είναι συνεχής. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 1 + \alpha = \alpha$$

Άρα $\alpha = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + \beta x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + \beta) = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

Άρα $\beta = 1$

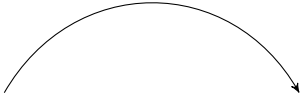
Η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

iii) Για $\alpha = 1, \beta = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & , x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 1 & , x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & , x > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	1	+
f	$-\infty$		$+\infty$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & , x < 0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & , x > 0 \end{cases}$$

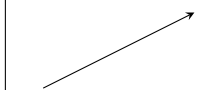

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-		-
f			

άρα η f είναι κοίλη στο \mathbb{R}

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$

- Στο $[-2, -1]$ η h είναι συνεχής με $h(-2) = -1 < 0$ και $h(-1) = 1 > 0$ άρα από Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-2, -1)$ ώστε $h(x_1) = 0$
- Στο $[0, 1]$ η h είναι συνεχής με $h(0) = 1 > 0$ και $h(1) = \ln 2 - 1 < 0$ άρα από Bolzano υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$ ώστε $h(x_2) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - 2 = \begin{cases} -2x - 1 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} - 2 & , x > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
h'	+		-	-
h				

- Στο διάστημα $(-\infty, -1/2]$ η h είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα $x_1 \in (-2, -1)$ είναι μοναδική
- Στο διάστημα $[-1/2, +\infty)$ η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα η ρίζα $x_2 \in (0, 1)$ είναι μοναδική

v) Η h έχει ρίζες τις $x_1 \in (-2, -1)$ και $x_2 \in (0, 1)$

- η h είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)
- $h(x_1) = h(x_2) = 0$

άρα από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (-2, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\rho) = 0 \Rightarrow f'(\rho) - 2 = 0 \Rightarrow f'(\rho) = 2$$

$h'(x) = f'(x) - 2$ άρα h' γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , οπότε ρ μοναδικό, διότι

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \stackrel{f' \text{ γν. φθων.}}{\Leftrightarrow} f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1) - 2 > f'(x_2) - 2 \Leftrightarrow h'(x_1) > h'(x_2)$$

vi) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

- Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[-2, \rho]$, υπάρχει $\xi_1 \in (-2, \rho)$ ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\rho) - f'(-2)}{\rho - (-2)} = \frac{2 - 5}{\rho + 2} = \frac{-3}{\rho + 2} \Rightarrow \frac{1}{f''(\xi_1)} = \frac{\rho + 2}{-3}$$

- Από Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[\rho, 1]$, υπάρχει $\xi_2 \in (\rho, 1)$ ώστε:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(1) - f'(\rho)}{1 - \rho} = \frac{1/2 - 2}{1 - \rho} = \frac{-3/2}{1 - \rho} \Rightarrow \frac{1}{2f''(\xi_2)} = \frac{1 - \rho}{-3}$$

οπότε

$$\frac{1}{f''(\xi_1)} + \frac{1}{2f''(\xi_2)} = \frac{\rho + 2}{-3} + \frac{1 - \rho}{-3} = \frac{\rho + 2 + 1 - \rho}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$