Άσκηση 5

Δίνεται συνάρτηση $f(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^3}dx = e - \sqrt{e} - \frac{9}{8}$.

i) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

Έστω $\alpha = 3$

ii) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ασύμπτωτες την $x = 0$ και την $y = x - 2$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\rho_1, \rho_2]$, όπου $\rho_1 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ και $\rho_2 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Δίνεται ότι $e^2 \simeq 7,3$.

iv) Να υπολογίσετε τα όρια:

α′) $\lim\limits_{x\to\rho_2^-}\left(\frac{f(x-\rho_1)}{f(x)} + \eta\mu\frac{1}{x-\rho_2}\right)$.

β′) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(f(x) - f(1)) \cdot \ln(x-1)\right]$.

γ′) $\lim\limits_{x\to\rho_1^+}\frac{f(x+\rho_2)}{f(x)}$.

Λύση

i)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^3}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{\alpha}{x^3}\right)dx = \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx - \alpha\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx =$$

$$\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \left[-\frac{\alpha}{2x^2}\right]_1^2 = -\sqrt{e} + e + \frac{\alpha}{8} - \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{e} + e - \frac{9}{8} \Rightarrow \alpha = 3$$

ii) Για $\alpha = 3$ είναι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}} - 3$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}} - 3\right) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x + 2) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - 3 - x + 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1\right) = 1 - 1 = 0$$

διότι θέτουμε $u = \dfrac{1}{x}$, τότε $u \to 0^+$ και

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{u\to 0^+}\frac{e^u - 1}{u} = 1.$$

Άρα η $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

iii) Είναι $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

O.E.
$f(1) = e - 3 < 0$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right]$ και ισχύει $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{3}{4}\right) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho_1 \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ ώστε $f(\rho_1) = 0$. Επειδή η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1)$, η ρίζα είναι μοναδική.

Ομοίως, η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2},2\right]$ και ισχύει $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f(2)<0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho_2 \in \left(\frac{3}{2},2\right)$ ώστε $f(\rho_2)=0$. Επειδή η f είναι γν. αύξουσα στο $(1,+\infty)$, η ρίζα είναι μοναδική.

x	0	ρ_1	ρ_2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0 $\quad -$	0 $\quad +$	

Άρα

$$f(x)\leq 0\ ,\ x\in[\rho_1,\rho_2].$$

iv) α΄)

$$-1\leq \eta\mu\frac{1}{x-\rho_2}\leq 1 \Rightarrow \frac{f(x-\rho_1)}{f(x)}-1\leq \frac{f(x-\rho_1)}{f(x)}+\eta\mu\frac{1}{x-\rho_2}\leq \frac{f(x-\rho_1)}{f(x)}+1$$

$$\lim_{x\to\rho_2^-}\left(\frac{f(x-\rho_1)}{f(x)}-1\right)=\lim_{x\to\rho_2^-}\left(\frac{f(x-\rho_1)}{f(x)}+1\right)=+\infty$$

γιατί

$$\lim_{x\to\rho_2^-} f(x-\rho_1)=f(\rho_2-\rho_1)<0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\rho_2^-} f(x)=0$$

αφού $\rho_2>\frac{3}{2}>2\cdot\frac{3}{4}>2\rho_1 \Leftrightarrow \rho_2-\rho_1>\rho_1$ και $\rho_1>0$ άρα $\rho_2-\rho_1<\rho_2$

δηλαδή $\rho_1<\rho_2-\rho_1<\rho_2$ και για $x\in(\rho_1,\rho_2)$ έχουμε $f(x)<0$

Άρα

$$\lim_{x\to\rho_2^-}\frac{f(2x-\rho_1)}{f(x)}=+\infty.$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to\rho_2^-}\left(\frac{f(2x-\rho_1)}{f(x)}+\eta\mu\frac{1}{x-\rho_2}\right)=+\infty.$$

β΄)

$$\lim_{x\to 1^+}\left[(f(x)-f(1))\ln(x-1)\right]=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=0\cdot 0=0$$

αφού

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}\overset{DLH}{=}0$$

γ΄)

$$\lim_{x\to\rho_1^+} f(x+\rho_2)=f(\rho_1+\rho_2)>0$$

διότι $\rho_1 + \rho_2 > \rho_2$ και $f(x) > 0$ για $x > \rho_2$.

Επίσης

$$\lim_{x \to \rho_1^+} f(x) = 0 \text{ με } f(x) < 0 \text{ για } x \to \rho_{1^+}$$

Άρα

$$\lim_{x \to \rho_1^+} \frac{f(x + \rho_2)}{f(x)} = -\infty.$$