

Άσκηση 50

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

ii) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $\kappa > 2\sqrt{2}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για τις οποίες ισχύει $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$.

iii) Αν $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) \right) = 3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περι-κλείεται από την C_f και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{6}$ και $x = \frac{\pi}{3}$.

Έστω F μία αρχική της f στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2F(x) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) + F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ έχει μοναδική ρίζα ρ με $\rho \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$.

v) Να λυθεί η ανίσωση $F(x) < 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

vi) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(f(x) - 2\sqrt{2}) \ln\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x = \sigma\upsilon\nu^3 x \Leftrightarrow \epsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
f'		-	0	+	
f	$+\infty$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty$$

$$\text{Επομένως } f(A) = [2\sqrt{2}, +\infty)$$

ii) Για $\kappa > 2\sqrt{2}$

- το $\kappa \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \kappa$ και f γν. φθίνουσα άρα μοναδικό
- το $\kappa \in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \kappa$ και f γν. αύξουσα άρα μοναδικό

Είναι

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x_1} + \frac{1}{\eta\mu x_1} = f(x_1) = \kappa$$

άρα $\frac{\pi}{2} - x_1$ είναι ρίζα της $f(x) = \kappa$ και λόγω μοναδικότητας στα διαστήματα Δ_1, Δ_2 είναι

$$x_2 = \frac{\pi}{2} - x_1 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$$

iii) Έχουμε

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow du = -dx$

- Για $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$
- Για $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$

Άρα

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} f(u)(-du) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(u) du$$

Επομένως

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) \right) dx = 3 \Rightarrow 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = 3 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \frac{3}{2}$$

Επειδή $f(x) > 0$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \frac{3}{2}$

iv) Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $F'(x) = f(x)$

Επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ προκύπτει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Θέτω $\phi(x) = 2F(x) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η ϕ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\phi\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $\phi(\rho) = 0$

Επιπλέον $\phi'(x) = 2F'(x) = 2f(x) > 0$ άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

v) Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x)$

- Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $F''(x) = f'(x) < 0$, άρα η F είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$
- Για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $F''(x) = f'(x) > 0$, άρα η F είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon : y - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y - 0 = f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

- Επειδή η F είναι κοίλη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα:

$$F(x) < 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

- Επειδή η F είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα:

$$F(x) > 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Συνεπώς:

$$F(x) < 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

vi)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(f(x) - 2\sqrt{2}) \ln \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ln \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ln \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{u = x - \frac{\pi}{4}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} -u = 0$$