Άσκηση 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)e^{x} - (x+1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, έστω x_1, x_2 με $x_1, x_2 \in (-2, 2)$.

iv) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to x_2} \left[\dfrac{\text{ημ}(x+x_1) - x}{f(x+x_1)+2} \cdot \ln(x+x_1) \right] = +\infty$.

v) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{x_2} f(x+x_1)dx - \int_0^{x_1} f(x+x_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x_1+x_2-x)dx$.

vi) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{-2}^{x_1} f(x+2)dx + \int_2^{x_2} f(2-x)dx = 0$.

vii) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(e^2 f(-\lambda) + 3 - e^4\right) x^4 + x + 2026}{\left(2f'(\kappa) - f(3) + f(1)\right) x^2 + 1}$, όπου $\kappa < 1$ και $\lambda > 2$.

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = (-x-1)e^{-x} - (-x+1)e^{-(-x)} = -(x+1)e^{-x} + (x-1)e^{x} = f(x)$$

Άρα η f είναι άρτια

ii) $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - [e^{-x} - (x+1)e^{-x}] = xe^x + xe^{-x} = x(e^x + e^{-x})$

- Αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- Αν $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = -2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ $\searrow$	-2	$\nearrow$ $+\infty$

ΟΕ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}] = \lim_{x\to+\infty} \left[(x-1)e^x - \frac{x+1}{e^x}\right]$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) - 0 = +\infty$

Σύνολο τιμών $f(A) = [-2, +\infty)$.

$f''(x) = (e^x + xe^x) + (e^{-x} - xe^{-x}) = (e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x})$.

- Για $x > 0$

  Είναι $e^x + e^{-x} > 0$ και $x > 0 \Rightarrow x > -x \Rightarrow e^x > e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} > 0$

  Άρα $x(e^x - e^{-x}) > 0$, οπότε $f''(x) > 0$

- Για $x < 0$

  Είναι $e^x + e^{-x} > 0$ και $x < 0 \Rightarrow x < -x \Rightarrow e^x < e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} < 0$

  Άρα $x(e^x - e^{-x}) > 0$, οπότε $f''(x) > 0$

- Για $x = 0$ $f''(0) = 2 > 0$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

iii)

- Για το $\Delta_1 = [0, +\infty)$ έχουμε $f(\Delta_1) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [-2, +\infty)$

  Το $0 \in [-2, +\infty)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_2 στο $[0, +\infty)$

  Επειδή $f(0) = -2 \neq 0$ η ρίζα είναι $x_2 > 0$.

- Αφού f και το x_2 είναι ρίζα, τότε και το $x_1 = -x_2$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης, αφού $f(x_1) = f(-x_2) = f(x_2) = 0$ και επειδή $x_2 > 0$ προκύπτει $x_1 < 0$

  η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0] \Rightarrow$ η ρίζα x_1 είναι μοναδική

  Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις x_1, x_2, για τις οποίες ισχύει $x_1 + x_2 = 0$

- Στο διάστημα $[0, 2]$ η f είναι συνεχής και $f(0) \cdot f(2) < 0$ άρα από Θ. Bolzano, η ρίζα x_2 βρίσκεται στο $(0, 2)$ οπότε η ρίζα $x_1 = -x_2$ θα βρίσκεται στο $(-2, 0)$. Άρα $x_1, x_2 \in (-2, 2)$

iv)

$$\lim_{x\to x_2^+}\left[\frac{\etaμ(x+x_1)-x}{f(x+x_1)+2}\cdot\ln(x+x_1)\right] \overset{u=x+x_1}{=} \lim_{u\to0^+}\left[\frac{\etaμ u-u+x_1}{f(u)+2}\cdot\ln u\right] = -(\infty)(-\infty) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{u\to0^+}\frac{\etaμ u-u+x_1}{f(u)+2} = \lim_{u\to0^+}(\etaμ u-u+x_1)\frac{1}{f(u)+2} = x_1(+\infty) = -\infty$$

αφού $x_1 < 0$ και από ΟΕ $f(u) + 2 \geq 0$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$ και το = για $u = 0$

v) Είναι $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$

- Στο 1ο ολοκλήρωμα θέτω $u = x + x_1$
- Στο 2ο ολοκλήρωμα θέτω $w = x + x_2$

άρα

$$\int_0^{x_2} f(x+x_1)dx - \int_0^{x_1} f(x+x_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x_1+x_2-x)dx$$

$$\int_{x_1}^{0} f(u)du - \int_{x_2}^{0} f(w)dw = \int_{x_1}^{x_2} f(-x)dx$$

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

vi) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\int_{-2}^{x_1} f(x+2)dx + \int_{2}^{x_2} f(2-x)dx = 0$

- Στο $I_1 = \int_{-2}^{x_1} f(x+2)dx \overset{u=x+2}{=} \int_0^{x_1+2} f(u)du$

- $I_2 = \int_2^{x_2} f(2-x)dx \overset{w=2-x}{=} -\int_0^{2-x_2} f(w)dw.$

Είναι $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$, οπότε $x_1 + 2 = 2 - x_2$

Συνεπώς $I_1 + I_2 = \int_0^{2-x_2} f(x)dx - \int_0^{2-x_2} f(x)dx = 0$

vii)

$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(e^2 f(-\lambda) + 3 - e^4\right) x^4}{\left(2f'(\kappa) - f(3) + f(1)\right) x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^2 f(\lambda) - (e^4 - 3)}{2f'(\kappa) - (f(3) - f(1))} \cdot x^2 = -\infty$$

διότι

- $$e^2 f(-\lambda) - (e^4 - 3) = e^2 f(\lambda) - e^2 f(2) = e^2 \left(f(\lambda) - f(2)\right)$$

  Επειδή $\lambda > 2 \underset{[0,+\infty)}{\overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow}} f(\lambda) > f(2) \Rightarrow e^2(f(\lambda) - f(2)) > 0$

- Από ΘΜΤ στο $[1,3]$ υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f(3) - f(1) = 2f'(\xi)$, οπότε

  $$2f'(\kappa) - 2f'(\xi) = 2\left(f'(\kappa) - f'(\xi)\right)$$

  Επειδή η f είναι κυρτή $\Rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

  $\kappa < 1 < \xi \Rightarrow f'(\kappa) < f'(\xi) \Rightarrow 2(f'(\kappa) - f'(\xi)) < 0 \Rightarrow 2f'(\kappa) - (f(3) - f(1)) < 0$