Άσκηση 52

Δίνεται συνάρτηση $g:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

- $g''(x) = -\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x}$ για κάθε $x\in(0,\pi)$
- $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

Επίσης, δίνεται συνάρτηση $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=2g'(x)e^{g(x)}+3g(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=2\text{συν}x+3\ln(\text{ημ}x)\ ,\ x\in(0,\pi)$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες $x_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ και $x_2=\dfrac{\pi}{2}$. (Δίνεται $\ln\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\simeq -0,57$)

iv) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)-2\text{συν}x\right)\text{συν}x\,dx=\frac{3}{2}\ln\frac{2}{e}$.

Λύση

i) Για κάθε $x \in (0,\pi)$ ισχύει

$$g''(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \Rightarrow g''(x) = (\sigma\varphi x)'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ

$$g'(x) = \sigma\varphi x + c \overset{g'(\frac{\pi}{2})=0}{\Rightarrow} c = 0$$

$$g'(x) = \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} = (\ln(\eta\mu x))'$$

άρα από συνέπειες ΘΜΤ

$$g(x) = \ln(\eta\mu x) + c \overset{g(\frac{\pi}{2})=0}{\Rightarrow} c = 0$$

Άρα $g(x) = \ln(\eta\mu x)$

$$f(x) = 2g'(x)e^{g(x)} + 3g(x) = 2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}e^{\ln(\eta\mu x)} + 3\ln(\eta\mu x)$$

$$f(x) = 2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\eta\mu x + 3\ln(\eta\mu x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 3\ln(\eta\mu x)\ ,\ x \in (0,\pi)$$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$$f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{-2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) + 3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2}{\eta\mu x} = \frac{2(\sigma\upsilon\nu x + 2)(\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{2})}{\eta\mu x}$$

Για κάθε $x \in (0,\pi)$ ισχύει $\eta\mu x > 0$ και $\sigma\upsilon\nu x + 2 > 0$ (αφού $-1 < \sigma\upsilon\nu x < 1$)

Επομένως, το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το $\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{2}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x < \pi$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\ln\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, \frac{\pi}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi)$

$$f((0,\pi)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1 + \ln\frac{3\sqrt{3}}{8}]$$

iii) • Στο $\Delta_1 = (0, \frac{\pi}{3}]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, f(\frac{\pi}{3})]$ το $0 \in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, \frac{\pi}{3})$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

- Στο $\Delta_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα με $f(\frac{\pi}{2}) = 2\cdot 0 + 3\cdot \ln 1 = 0$

  άρα $x_2 = \frac{\pi}{2}$ η μοναδική ρίζα στο Δ_2

iv) Έχουμε

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - 2\text{συν}x)\text{συν}x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3\ln(\text{ημ}x)\text{συν}x dx$$

Θέτω $u = \text{ημ}x \Rightarrow du = \text{συν}x dx$

- Για $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$
- Για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

$$I = 3\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln u du = 3\Big[u\ln u - u\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{2}(\ln 2 - \ln e) = \frac{3}{2}\ln\frac{2}{e}$$