

## Άσκηση 53

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(x) = \alpha \cdot 2^{x+1} + f(x) \cdot \ln 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(-1, 0)$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\frac{\pi}{4}$ .

i ) Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

ii ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{2^{x+1}} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $f$ .

Έστω  $f(x) = 2^{x+1}(x + 1)$ .

iii ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να βρεθούν οι θέσεις των ακροτάτων και των σημείων καμπής.

iv ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της  $C_f$  και να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση.

v ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = -1$ ,  $x = 0$ .

vi ) Να δείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (-1, 0)$  τέτοιο, ώστε  $2^{-\xi} = \ln 2 \cdot \xi + \ln(2e)$ .

## Λύση

i) Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $M(-1, 0)$  σχηματίζει γωνία  $\frac{\pi}{4}$  με τον  $x'x$ , άρα

$$f'(-1) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ και } f(-1) = 0$$

Από τη δοθείσα σχέση για  $x = -1$  έχουμε

$$f'(-1) = \alpha \cdot 2^0 + f(-1) \cdot \ln 2 \Rightarrow 1 = \alpha + 0 \cdot \ln 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

ii) Η  $g(x) = \frac{f(x)}{2^{x+1}} - x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot 2^{x+1} - f(x) \cdot (2^{x+1} \ln 2)}{(2^{x+1})^2} - 1 = \frac{f'(x) - f(x) \ln 2}{2^{x+1}} - 1$$

Για  $\alpha = 1$  η αρχική σχέση γίνεται  $f'(x) - f(x) \ln 2 = 2^{x+1}$ , οπότε

$$g'(x) = \frac{2^{x+1}}{2^{x+1}} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow g(x) = c$$

για  $x = -1$  έχουμε  $g(-1) = \frac{f(-1)}{2^0} - (-1) = 0 + 1 = 1$

Επομένως  $g(x) = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{2^{x+1}} - x = 1 \Rightarrow f(x) = 2^{x+1}(x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

iii)  $f'(x) = 2^{x+1} \ln 2 \cdot (x+1) + 2^{x+1} = 2^{x+1}[(x+1) \ln 2 + 1]$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$x$	$-\infty$	$-1 - \frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'$		-   0   +	
$f$	$+\infty$		$+\infty$

OE

$$f''(x) = 2^{x+1} \ln 2 [(x+1) \ln 2 + 1] + 2^{x+1} \ln 2 = 2^{x+1} \ln 2 [(x+1) \ln 2 + 2]$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1 - \frac{2}{\ln 2}$$

$x$	$-\infty$	$-1 - \frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$
$f''$		-   0   +	
$f$			

ΣΚ

iv) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

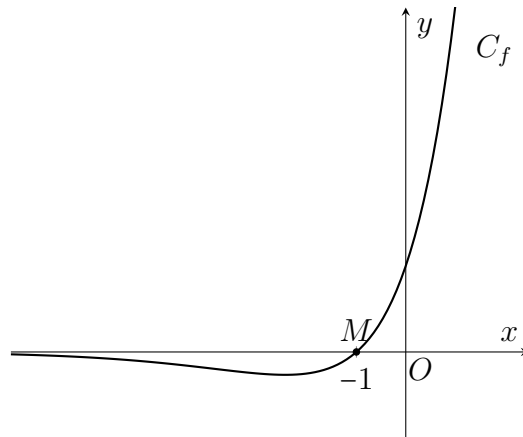
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2^{x+1}(x+1)] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1}(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2^{x+1} \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

άρα η  $C_f$  δεν έχει ασύμπτωτη στο  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2^{x+1}(x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{2^{-(x+1)}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2^{-(x+1)} \cdot \ln 2} = 0$$

Άρα η  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$



v) Στο διάστημα  $[-1, 0]$  είναι  $f(x) \geq 0$ , άρα

$$E = \int_{-1}^0 2^{x+1}(x+1) dx$$

Θέτω  $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$

Για  $x = -1 \Rightarrow u = 0$

για  $x = 0 \Rightarrow u = 1$

$$E = \int_0^1 u \cdot 2^u du = \int_0^1 u \cdot \left( \frac{2^u}{\ln 2} \right)' du = \left[ \frac{u \cdot 2^u}{\ln 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2^u}{\ln 2} du = \frac{2}{\ln 2} - \left[ \frac{2^u}{(\ln 2)^2} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}$$

vi) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  και παραγωγίσιμη στο  $(-1, 0)$  άρα από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = 2 \Rightarrow 2^{\xi+1}[(\xi+1)\ln 2 + 1] = 2 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 2^{\xi}[\xi \ln 2 + \ln 2 + 1] = 2 \Rightarrow 2^{\xi}[\xi \ln 2 + \ln 2 + \ln e] = 1 \Rightarrow$$
$$2^{\xi}[\xi \ln 2 + \ln(2e)] = 1 \Rightarrow \xi \ln 2 + \ln(2e) = 2^{-\xi}$$