Άσκηση 54

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x + \alpha x - 1 & , \ x \geq 1 \\ x^2 + \beta & , \ x < 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα α, β αν η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[-1, e]$.

Έστω $\alpha = 1$, $\beta = -1$

ii) Να βρείτε τα $\xi \in (-1, e)$ ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(e, f(e))$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) α΄) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

β΄) Να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\text{ημ}x)dx > 2 - \pi$.

v) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\eta\mu x}{(f(x) - 2x + 2)(e^{x-1} - 1)}$.

Λύση

i) Αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[-1, e]$ τότε είναι συνεχής στο $[-1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, e)$, άρα

Συνέχεια στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + \beta = \ln 1 + \alpha - 1 \Rightarrow \alpha - \beta = 2 \quad (1)$$

Παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + \beta - (\alpha - 1)}{x - 1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + \alpha x - 1 - (\alpha - 1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x + \alpha(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} + \alpha = 1 + \alpha$$

γιατί $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

Πρέπει $1 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ και από την (1) $\beta = -1$

ii) Είναι $f(x) = \begin{cases} \ln x + x - 1 & , \ x \geq 1 \\ x^2 - 1 & , \ x < 1 \end{cases}$ και $f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

Ζητάμε $\xi \in (-1, e)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(e) - f(-1)}{e - (-1)} = \frac{e}{e + 1}$

- Αν $\xi \in (-1, 1)$, τότε

$$f'(\xi) = 2\xi \Rightarrow 2\xi = \frac{e}{e + 1} \Rightarrow \xi = \frac{e}{2(e + 1)} \in (-1, 1)$$

- Αν $\xi \in [1, e)$, τότε

$$f'(\xi) = \frac{1}{\xi} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\xi} + 1 = \frac{e}{e + 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{e + 1} \Rightarrow \xi = -(e + 1)$$

  αδύνατο αφού $\xi > 0$

iii) $f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$ και $f''(x) = \begin{cases} 2 & , \ x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & , \ x > 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0 $+$		$+$
f	$+\infty$ ↘	-1 ↗		$+\infty$
		ΟΕ	συνεχής στο 1	

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$+$	‖	$-$
f			

ΣΚ
$(1,0)$

$f(A) = [-1, +\infty)$

iv) α′) $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

β′) Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1]$ άρα

$$f(x) \geq 2x - 2 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 1] \text{ και το } = \text{ μόνο για } x = 1$$

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $0 \leq ημx \leq 1$, επομένως

$$f(ημx) \geq 2ημx - 2 \text{ και το } = \text{ για } x = \frac{\pi}{2}$$

οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(ημx)\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2ημx - 2)\,dx = \Big[-2συνx - 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0 - \pi) - (-2 - 0) = 2 - \pi$$

v) Έχουμε

$$\lim_{x \to 1} \frac{ημx}{(f(x) - 2x + 2)(e^{x-1} - 1)} = \lim_{x \to 1}\left(ημx \cdot \frac{1}{(f(x) - 2x + 2)(e^{x-1} - 1)}\right) = ημ1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

διότι

- $\lim\limits_{x \to 1} ημx = ημ1 > 0$
- Για $x < 1$ είναι $x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 < 0$ και

  η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 1]$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη, δηλαδή $f(x) \geq 2x - 2 \Rightarrow f(x) - 2x + 2 \geq 0$ και το $=$ μόνο για $x = 1$
- Για $x > 1$ είναι $x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0$ και

  η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$ άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη, δηλαδή $f(x) \leq 2x - 2 \Rightarrow f(x) - 2x + 2 \leq 0$ και το $=$ μόνο για $x = 1$