Άσκηση 55

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν

- $f'(x) \geq \dfrac{e^x}{e^x + 1} + 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ μόνο για $x = 0$
- $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

ii) η f δεν έχει ακρότατα.

iii) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

iv) $2f''(0) - f'(0) = 0$.

v) α′) $f(1) > \ln(e + 1) + 1$.

β′) $f'(\xi) > \ln \dfrac{e^2 + e}{2}$.

vi) Επιπλέον, δίνεται ότι η f'' είναι συνεχής με $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(e^x)dx > \frac{e}{2} + f(0) - f'(0)$.

Λύση

i) Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \ln(e^x + 1) + x^3$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} + 3x^2$

Είναι $f'(x) \geq g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$

Θέτω $\phi(x) = f(x) - g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών και

$$\phi'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$$

άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Για $x > 0 \Rightarrow \phi(x) > \phi(0) \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x) = \ln(e^x + 1) + x^3$

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln(e^x + 1) + x^3) = +\infty$$

άρα

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Για $x < 0 \Rightarrow \phi(x) < \phi(0) \Rightarrow f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x) = \ln(e^x + 1) + x^3 < g(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (\ln(e^x + 1) + x^3) = \ln 1 + (-\infty) = -\infty$$

άρα

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ii) Είναι $f'(x) \geq \dfrac{e^x}{e^x + 1} + 3x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα

iii) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$f(A) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Το $0 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

iv) Είναι $\phi'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0 \Rightarrow \phi'(x) \geq \phi'(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η ϕ' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και ϕ' παραγωγίσιμη στο 0, οπότε από Θεώρημα Fermat

$$\phi''(0) = 0 \Rightarrow f''(0) - g''(0) = 0 \Rightarrow f''(0) = g''(0) = \frac{1}{4}$$

αφού

$$g''(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} + 6x = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} + 6x$$

Οπότε

$$2f''(0) - f'(0) = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 0$$

v) α′) Για $x > 0$ είναι $f(x) > g(x)$, άρα για $x = 1$ προκύπτει $f(1) > g(1) = \ln(e+1) + 1$

β′) Από ΘΜΤ για την f στο $[0,1]$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - \ln 2 > \ln(e+1) + 1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) + \ln e = \ln\left(\frac{e^2+e}{2}\right)$$

vi) Αφού $f''(x) \neq 0$ στο $\mathbb{R}$ και συνεχής, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f''(0) = \frac{1}{4} > 0$, οπότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή

η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

αφού f κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε $f(x) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2$ και το = μόνο για $x = 0$

άρα για $x = e^x > 0$ έχουμε $f(e^x) > \frac{1}{2}e^x + \ln 2$, οπότε

$$\int_0^1 f(e^x)dx > \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^x + \ln 2\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^x + x\ln 2\right]_0^1 = \frac{e}{2} + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} + f(0) - f'(0)$$