Άσκηση 56

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x)f(1-x)=e$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και $f(1)=e$

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x)=f(x)f(1-x)$ είναι σταθερή.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Έστω $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} f(x)+(\ln f(x))^2-1 & , \ x\in[0,+\infty) \\ (\ln f(x))^3+\ln f(x) & , \ x\in(-\infty,0) \end{cases}$.

iii) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ για την hστο $[-1,1]$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h'(x)=\dfrac{h(1)-h(-1)}{2}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(-1,1)$.

v) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $K(x)=h(x)-\dfrac{e+2}{2}x$, $x\in\mathbb{R}$ έχει στο x_1 τοπικό μέγιστο και στο x_2 τοπικό ελάχιστο, όπου $x_1\in(-1,0)$ και $x_2\in(0,1)$.

vi) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} xh''(x)dx=(x_2-x_1)\left(\frac{e+2}{2}-h'(\rho)\right)$, όπου $\rho\in(-1,1)$.

Λύση

i) Η Φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\Phi'(x) = f'(x)f(1-x) + f(x)f'(1-x)(-1) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)$$

Στη σχέση $f'(x)f(1-x) = e$ θέτω όπου x το $1-x$ οπότε προκύπτει $f'(1-x)f(x) = e$

Άρα $\Phi'(x) = e - e = 0$, οπότε η Φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

ii) Είναι $\Phi(x) = c$ άρα για $x = 0$ έχουμε $\Phi(0) = f(0)f(1) = e \Rightarrow c = e$

άρα $f(x)f(1-x) = e$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από όπου προκύπτει ότι $f(x),\ f(1-x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$$f'(x)f(1-x) = e \Rightarrow f'(x) \cdot \frac{e}{f(x)} = e \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow (\ln f(x))' = (x)'$$

συνεπώς

$$\ln f(x) = x + c \overset{x=0}{\Rightarrow} \ln 1 = c \Rightarrow c = 0$$

άρα

$$\ln f(x) = x \Rightarrow f(x) = e^x$$

iii) Για $f(x) = e^x$ έχουμε ότι $h(x) = \begin{cases} e^x + x^2 - 1 & , \ x \geq 0 \\ x^3 + x & , \ x < 0 \end{cases}$

- Η h είναι συνεχής στο $(0,1]$ και στο $[-1,0)$
- Για $x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0$ και $h(0) = 0$, άρα συνεχής στο $[-1,1]$
- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + x^2 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + 2x}{1} = 1$$

  και

  $$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^2 + 1 = 1$$

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $h'(x) = \begin{cases} e^x + 2x & , \ x \geq 0 \\ 3x^2 + 1 & , \ x < 0 \end{cases}$

οπότε η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[-1,1]$

iv) $\dfrac{h(1)-h(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{e-(-2)}{2} = \dfrac{e+2}{2}$ και $h''(x) = \begin{cases} e^x + 2 & , \ x > 0 \\ 6x & , \ x < 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h''		$-$	$\|\|$	$+$	
h'	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Στο $(-\infty,0)$ είναι h' συνεχής και γν. φθίνουσα με $h'((-1,0)) = (1,4)$

  Επειδή $\dfrac{e+2}{2} \in (1,4)$ υπάρχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (-1,0)$
- Στο $[0,+\infty)$ h' συνεχής και γν. αύξουσα με $h'([0,1)) = [1, e+2)$

  Επειδή $\dfrac{e+2}{2} \in (1, e+2)$, υπάρχει μοναδική ρίζα $x_2 \in (0,1)$

v) $K(x) = h(x) - \dfrac{e+2}{2}x \Rightarrow K'(x) = h'(x) - \dfrac{e+2}{2}$

$K'(x) = 0 \Rightarrow h'(x) = \dfrac{e+2}{2} \Rightarrow x = x_1,\ x = x_2.$

- Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η h' είναι γνησίως φθίνουσα
  - Για $x < x_1 \xrightarrow{h'\searrow} h'(x) > h'(x_1) \Rightarrow h'(x) > \dfrac{e+2}{2} \Rightarrow K'(x) > 0$
  - Για $x_1 < x < 0 \xrightarrow{h'\searrow} h'(x) < h'(x_1) \Rightarrow h'(x) < \dfrac{e+2}{2} \Rightarrow K'(x) < 0$
- Στο διάστημα $[0,+\infty)$ η h' είναι γνησίως αύξουσα.
  - Για $0 < x < x_2 \xrightarrow{h'\nearrow} h'(x) < h'(x_2) \Rightarrow h'(x) < \dfrac{e+2}{2} \Rightarrow K'(x) < 0$
  - Για $x > x_2 \xrightarrow{h'\nearrow} h'(x) > h'(x_2) \Rightarrow h'(x) > \dfrac{e+2}{2} \Rightarrow K'(x) > 0$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
K'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
K		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			TM				TE		

Επομένως, η συνάρτηση K παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in (-1,0)$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in (0,1)$

vi) Έχουμε

$$\int_{x_1}^{x_2} x h''(x)dx = \Big[x h'(x)\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} h'(x)dx = \Big(x_2 h'(x_2) - x_1 h'(x_1)\Big) - \Big(h(x_2) - h(x_1)\Big)$$

Όμως $h'(x_1) = h'(x_2) = \dfrac{e+2}{2}$, οπότε

$$\int_{x_1}^{x_2} xh''(x)dx = \left(x_2\frac{e+2}{2} - x_1\frac{e+2}{2}\right) - \Big(h(x_2) - h(x_1)\Big) =$$

$$(x_2 - x_1)\frac{e+2}{2} - \Big(h(x_2) - h(x_1)\Big)$$

Από ΘΜΤ στο $[x_1, x_2]$ για την h υπάρχει $\rho \in (x_1, x_2) \subset (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\rho) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \iff h(x_2) - h(x_1) = (x_2 - x_1)h'(\rho)$$

Οπότε

$$\int_{x_1}^{x_2} xh''(x)dx = (x_2 - x_1)\frac{e+2}{2} - (x_2 - x_1)h'(\rho) = (x_2 - x_1)\left(\frac{e+2}{2} - h'(\rho)\right)$$