Άσκηση 57

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη στο A, όπου $A = [\kappa, \lambda]$ με $\kappa = \lim\limits_{x \to 0} (x \ln x)$ και $\lambda = \int\limits_0^1 xe^x dx$.

i) Να δείξετε ότι $A = [0, 1]$.

Δίνεται επιπλέον ότι $f(1) = \lambda$ και $f(0) = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = \dfrac{1 - x_0}{x_0}$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = \dfrac{2x_0 - 1}{x_0^3}$.

iv) Να βρείτε το x_0 αν ισχύει το Θεώρημα Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.

v) Να αποδείξετε ότι $\int\limits_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^1 xf'(x)dx > \sqrt{5} - 2$.

Λύση

i) Έχουμε

- $\kappa = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$
- $\lambda = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \Big[e^x\Big]_0^1 = e-(e-1) = 1$

άρα $A = [0,1]$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf(x) + x - 1$, $x \in [0,1]$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

- $g(0) = 0\cdot f(0) + 0 - 1 = -1 < 0$
- $g(1) = 1\cdot f(1) + 1 - 1 = f(1) = 1 > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0) = 1 - x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{1-x_0}{x_0}$$

για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \overset{x,\, f(x)\,\geq\, 0}{\Rightarrow} x_1 f(x_1) < x_2 f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$x_1 f(x_1) + x_1 - 1 < x_2 f(x_2) + x_2 - 1$$

$$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \text{ γν. αύξουσα στο } [0,1]$$

άρα το x_0 είναι μοναδικό

iii) Από ΘΜΤ για την f στο $[0,x_0]$ και στο $[x_0,1]$ έχουμε ότι

- υπάρχει $\xi_1 \in (0,x_0)$ ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0 - 0} = \dfrac{\dfrac{1-x_0}{x_0}}{x_0} = \dfrac{1-x_0}{x_0^2}$
- υπάρχει $\xi_2 \in (x_0,1)$ ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = \dfrac{1-\dfrac{1-x_0}{x_0}}{1-x_0} = \dfrac{2x_0-1}{x_0(1-x_0)}$

άρα $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \dfrac{1-x_0}{x_0^2}\cdot\dfrac{2x_0-1}{x_0(1-x_0)} = \dfrac{2x_0-1}{x_0^3}$

iv) Αφού ισχύει το Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ τότε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, άρα

$$\frac{1-x_0}{x_0^2} = \frac{2x_0-1}{x_0(1-x_0)} \Leftrightarrow (1-x_0)^2 = x_0(2x_0-1) \Leftrightarrow$$

$$1 - 2x_0 + x_0^2 = 2x_0^2 - x_0 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 1 = 0 \overset{x_0\,\in\,(0,1)}{\Rightarrow} x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

v) Είναι

$$I = \int_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}^{0} xf'(x)dx = \int_{x_0}^{1} xf'(x)dx = \Big[xf(x)\Big]_{x_0}^{1} - \int_{x_0}^{1} f(x)dx =$$

$$f(1) - x_0 f(x_0) - \int_{x_0}^{1} f(x)dx$$

όμως $x_0 f(x_0) \overset{(ii)}{=} 1 - x_0 \overset{(iv)}{=} {x_0}^2$ άρα

$$I = 1 - x_0^2 - \int_{x_0}^{1} f(x)dx \overset{1-x_0^2=x_0}{=} x_0 - \int_{x_0}^{1} f(x)dx$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le f(1) \Leftrightarrow f(x) \le 1$$

και το = μόνο για $x = 1$, επομένως

$$\int_{x_0}^{1} f(x)dx < \int_{x_0}^{1} 1dx = 1 - x_0 \Leftrightarrow - \int_{x_0}^{1} f(x)dx > x_0 - 1$$

άρα

$$I > 2x_0 - 1 = 2\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big) - 1 = \sqrt{5} - 1 - 1 = \sqrt{5} - 2$$

.