Άσκηση 58

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}$, $x \neq \alpha$, $g(x) = x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $f \circ g = h$.

Έστω $\alpha = 1$, $\beta = -2$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να δείξετε ότι $f^{-1} = f$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(g(x)) = \eta\mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

vi) α΄) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $K(\lambda) = \displaystyle\int_2^{\lambda} f^{-1}(x)dx$, $\lambda > 1$.

β΄) Να βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{K(\lambda) + 2}{|\lambda + 1|}$.

Λύση

i) Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και $D_g = \mathbb{R}$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \alpha \neq \alpha\} = \mathbb{R} - \{0\} = D_h$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{\alpha(x+\alpha)+\beta}{(x+\alpha)-\alpha} = \dfrac{\alpha x + \alpha^2 + \beta}{x} = \alpha + \dfrac{\alpha^2+\beta}{x}$

Αφού $h(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ για να ισχύει $f \circ g = h$ για κάθε $x \neq 0$ πρέπει

$\alpha = 1$ και $\alpha^2 + \beta = -1 \Rightarrow 1 + \beta = -1 \Rightarrow \beta = -2$

ii) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$ έχουμε $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1},\ x \neq 1$

έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{x_1 - 1} = \frac{x_2 - 2}{x_2 - 1} \Rightarrow$$

$$(x_1 - 2)(x_2 - 1) = (x_2 - 2)(x_1 - 1) \Rightarrow$$

$$x_1x_2 - x_1 - 2x_2 + 2 = x_1x_2 - x_2 - 2x_1 + 2 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται

iii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f με $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	‖	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ και

$f(A) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

iv) Θέτω $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{x-2}{x-1} \Rightarrow yx - y = x - 2 \Rightarrow x(y-1) = y - 2 \overset{y \neq 1}{\Rightarrow} x = \dfrac{y-2}{y-1}$

άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$, $x \neq 1$

οπότε $D_f = D_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq 1 \Rightarrow f = f^{-1}$

v) $f^{-1}(g(x)) = \etaμx \Rightarrow h(x) = \etaμx \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{x} - \etaμx = 0$

Θέτω $\phi(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \etaμx$, $x \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi]$

- η ϕ είναι συνεχής στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών
- $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} - 1 = -\frac{2}{\pi} < 0$
- $\phi(\pi) = 1 - \frac{1}{\pi} - 0 = \frac{\pi - 1}{\pi} > 0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0) = 0$

vi) α′) $K(\lambda) = \int_2^\lambda \frac{x-2}{x-1}dx = \int_2^\lambda (1 - \frac{1}{x-1})dx = \Big[x - \ln|x-1|\Big]_2^\lambda = \lambda - \ln(\lambda - 1) - 2.$

β′) Είναι

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{K(\lambda) + 2}{|\lambda + 1|} \overset{\lambda \geq 1}{=} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda - \ln(\lambda - 1) - 2 + 2}{\lambda + 1} =$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1 - \frac{\ln(\lambda - 1)}{\lambda}}{1 + \frac{1}{\lambda}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

διότι

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln(\lambda - 1)}{\lambda} \overset{DLH}{=} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda - 1}}{1} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda - 1} = 0$$