Άσκηση 59

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x)+f(-x)=3x^2e^{x^2}+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και $f(0)=1$.

Έστω $f(x)=x^2e^{x^2}+1$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι $4f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+\alpha^2+\beta^2\le 2\left(f(\alpha)+f(\beta)\right)+2\alpha\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι $2<\displaystyle\int_{-1}^{1}g(x)dx<2e$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-x-1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{(f(x)-1)^2}$.

Λύση

i) Είναι

$$2f(x) + f(-x) = 3x^2e^{x^2} + 3$$

Για $x = 0$ έχουμε $2f(0) + f(0) = 3 \Rightarrow 3f(0) = 3 \Rightarrow f(0) = 1$

Θέτω στην αρχική σχέση όπου x το $-x$ οπότε προκύπτει

$$2f(-x) + f(x) = 3(-x)^2e^{(-x)^2} + 3 \Rightarrow 2f(-x) + f(x) = 3x^2e^{x^2} + 3$$

Αφαιρώ τις δύο σχέσεις κατά μέλη, οπότε

$$(2f(x) + f(-x)) - (2f(-x) + f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι άρτια

Οπότε

$$2f(x) + f(x) = 3x^2e^{x^2} + 3 \Rightarrow 3f(x) = 3(x^2e^{x^2} + 1) \Rightarrow f(x) = x^2e^{x^2} + 1$$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (x^2e^{x^2} + 1)' = 2xe^{x^2} + x^2e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}(1 + x^2)$$

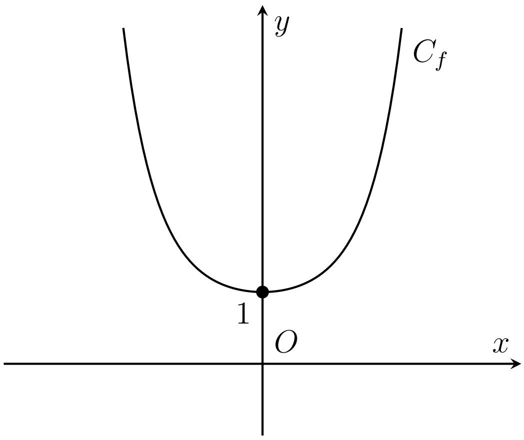
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			ΟΕ		

$f(A) = [1, +\infty)$

iii) Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = (2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2})' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + 6x^2e^{x^2} + 4x^4e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1)$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$



iv) Είναι $g(x) = f(x) - x^2 \Rightarrow g(x) = x^2(e^{x^2} - 1) + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και

$g'(x) = f'(x) - 2x = 2x(e^{x^2} + x^2 e^{x^2} - 1)$

- Αν $x > 0 \Rightarrow e^{x^2} > 1$ και $x^2 e^{x^2} > 0$, άρα $g'(x) > 0$
- Αν $x < 0 \Rightarrow e^{x^2} > 1$ και $x^2 e^{x^2} > 0$, άρα $g'(x) < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			ΟΕ		

Σύνολο τιμών $g(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$

v) Έχουμε

$$4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \alpha^2 + \beta^2 \leq 2f(\alpha) + 2f(\beta) + 2\alpha\beta$$

$$4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 \leq 2f(\alpha) - 2\alpha^2 + 2f(\beta) - 2\beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - (\alpha^2 + \beta^2) \leq 2(f(\alpha) - \alpha^2) + 2(f(\beta) - \beta^2) + 2\alpha\beta$$

$$4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \leq 2g(\alpha) + 2g(\beta)$$

$$4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - (\alpha+\beta)^2 \leq 2g(\alpha) + 2g(\beta)$$

$$2\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right] \leq g(\alpha) + g(\beta)$$

$$2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq g(\alpha) + g(\beta) \Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{2}$$

- Για $\alpha = \beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα
- Για $\alpha \neq \beta$ χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $\alpha < \beta$

  Από ΘΜΤ για την g στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και στο $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ έχουμε ότι

  υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ώστε $g'(\xi_1) = \dfrac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

  υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ ώστε $g'(\xi_2) = \dfrac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

  Έχουμε $g''(x) = 2\left[e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1) - 1\right]$

  - Για $x = 0$ είναι $g''(0) = 2(1-1) = 0$
  - Για $x \neq 0$ ισχύει $e^{x^2} > 1$ και $2x^4 + 5x^2 + 1 > 1$, επομένως $g''(x) > 0$

  Επειδή $g''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 0$ η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

  Είναι

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{g' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} \frac{g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha) < g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < g(\alpha) + g(\beta) \Leftrightarrow g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{2}$$

vi) Η συνάρτηση g είναι

- γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$ οπότε για

$$-1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow g(-1) \geq g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow 1 \leq g(x) \leq e$$

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$ οπότε για

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow g(0) \leq g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow 1 \leq g(x) \leq e$$

Συνεπώς $1 \leq g(x) \leq e$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

και το = μόνο για $x = 0$ και για $x = 1$, $x = -1$, αντίστοιχα, οπότε

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx < \int_{-1}^{1} g(x)dx < \int_{-1}^{1} e\,dx \Rightarrow \Big[x\Big]_{-1}^{1} < \int_{-1}^{1} g(x)dx < \Big[ex\Big]_{-1}^{1}$$

άρα

$$2 < \int_{-1}^{1} g(x)dx < 2e$$

vii) Είναι

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - x - 1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)}{(f(x)-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - x - 1)\cdot\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)}{x^4 e^{2x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x - x - 1}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}\cdot\frac{1}{e^{2x^2}}\right] = \frac{1}{4}$$

διότι

- $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} =$$

  $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x^2}} = 1$$