Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. Η C_f έχει σημείο καμπής στο σημείο με τετμημένη 1 και ισχύει $\int_0^2 f(x)dx=4$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$, $\beta=3$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να δείξετε ότι $\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx-\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx=4$, όπου x_1 και x_2 οι θέσεις του τοπικού ελαχίστου και του τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα, της f και x_3 η θέση του σημείου καμπής.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varepsilon\varphi^2 x+1)dx<\dfrac{12-\pi}{4}$.

v) Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x)=\left(\int_0^2 f(x)dx\right)\eta\mu x-\left(\int_0^2 (3x-1)dx\right)\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\xi+\sigma\upsilon\nu\xi=\dfrac{4}{\pi}$, όπου $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

i) Έχουμε $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ οπότε $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$.

Επειδή η C_f έχει σημείο καμπής στο $x = 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ισχύει

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (\alpha x^3 + \beta x^2)dx = \Big[\alpha\frac{x^4}{4} + \beta\frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 4\alpha + \frac{8\beta}{3} \Rightarrow 4\alpha + \frac{8\beta}{3} = 4$$

Άρα $4\alpha - 8\alpha = 4 \Leftrightarrow -4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = -1$, οπότε $\beta = 3$.

Συνεπώς $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

ii) Έχουμε $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$ και $f''(x) = -6x + 6 = -6(x-1)$.

Για τη μονοτονία:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

T.E. $f(0) = 0$ T.M. $f(2) = 4$

Για την κυρτότητα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$					

Σ.Κ.

$K(1,2)$

iii) Οι θέσεις του τοπικού ελαχίστου, του τοπικού μεγίστου και του σημείου καμπής είναι αντίστοιχα $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

Τότε

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_2^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = 4$$

iv) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $y-2=3(x-1)$, δηλαδή $y=3x-1$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο $x=1$. Άρα, για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $f(x) \leq 3x-1$.

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι $\varepsilon\varphi^2 x+1 \geq 2$ και το = για $x=\frac{\pi}{4}$

Επομένως $f(\varepsilon\varphi^2 x+1) \leq 3(\varepsilon\varphi^2 x+1)-1 = 3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1$.

Άρα $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varepsilon\varphi^2 x+1)\,dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1\,dx = \Big[3\varepsilon\varphi x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3-\frac{\pi}{4} = \frac{12-\pi}{4}$

Επομένως $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan^2 x+1)\,dx \leq \frac{12-\pi}{4}$.

v) $\int\limits_0^2 f(x)dx = 4$ και $\int\limits_0^2 (3x-1)dx = \left[\frac{3x^2}{2}-x\right]_0^2 = 6-2=4$.

Άρα $\Phi(x) = 4\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x$ και $\Phi'(x) = 4\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$

Από το ΘΜΤ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\Phi'(\xi) = \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\Phi(0)}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{4+4}{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{\pi} \Rightarrow$$

$$4\eta\mu\xi + 4\sigma\upsilon\nu\xi = \frac{16}{\pi} \Leftrightarrow \eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{4}{\pi}$$