

## Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Η  $C_f$  έχει σημείο καμπής στο σημείο με τετμημένη 1 και ισχύει  $\int_0^2 f(x) dx = 4$ .

i) Να δείξετε ότι  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 3$ .

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να δείξετε ότι  $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = 4$ , όπου  $x_1$  και  $x_2$  οι θέσεις του τοπικού ελαχίστου και του τοπικού μεγίστου, αντίστοιχα, της  $f$  και  $x_3$  η θέση του σημείου καμπής.

iv) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varepsilon \varphi^2 x + 1) dx < \frac{12 - \pi}{4}$ .

v) Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \left( \int_0^2 f(x) dx \right) \eta \mu x - \left( \int_0^2 (3x - 1) dx \right) \sigma \upsilon \nu x, \quad x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Να αποδείξετε ότι  $\eta \mu \xi + \sigma \upsilon \nu \xi = \frac{4}{\pi}$ , όπου  $\xi \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ .

## Λύση

i) Έχουμε  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$  οπότε  $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$  και  $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ .

Επειδή η  $C_f$  έχει σημείο καμπής στο  $x = 1$  και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ισχύει

$$f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (\alpha x^3 + \beta x^2) dx = \left[ \alpha \frac{x^4}{4} + \beta \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4\alpha + \frac{8\beta}{3} \Rightarrow 4\alpha + \frac{8\beta}{3} = 4$$

Άρα  $4\alpha - 8\alpha = 4 \Leftrightarrow -4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = -1$ , οπότε  $\beta = 3$ .

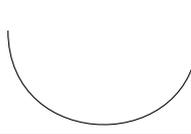
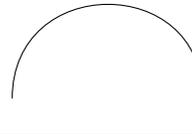
Συνεπώς  $f(x) = -x^3 + 3x^2$ .

ii) Έχουμε  $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$  και  $f''(x) = -6x + 6 = -6(x - 1)$ .

Για τη μονοτονία:

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$
			T.E. $f(0) = 0$		T.M. $f(2) = 4$		

Για την κυρτότητα:

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f''(x)$		+	0	-
$f(x)$				
			Σ.Κ. $K(1, 2)$	

iii) Οι θέσεις του τοπικού ελαχίστου, του τοπικού μεγίστου και του σημείου καμπής είναι αντίστοιχα  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 1$ .

Τότε

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_2^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 4$$

iv) Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση  $y - 2 = 3(x - 1)$ , δηλαδή  $y = 3x - 1$ .

Επειδή η  $f$  είναι κοίλη στο  $[1, +\infty)$ , η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο  $x = 1$ . Άρα, για κάθε  $x \geq 1$  ισχύει  $f(x) \leq 3x - 1$ .

Για  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  είναι  $\varepsilon\varphi^2 x + 1 \geq 2$  και το = για  $x = \frac{\pi}{4}$

Επομένως  $f(\varepsilon\varphi^2 x + 1) \leq 3(\varepsilon\varphi^2 x + 1) - 1 = 3\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$ .

$$\text{Άρα } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\varepsilon\varphi^2 x + 1) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 dx = \left[3\varepsilon\varphi x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 - \frac{\pi}{4} = \frac{12 - \pi}{4}$$

$$\text{Επομένως } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan^2 x + 1) dx \leq \frac{12 - \pi}{4}.$$

$$\text{v) } \int_0^2 f(x) dx = 4 \text{ και } \int_0^2 (3x - 1) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_0^2 = 6 - 2 = 4.$$

Άρα  $\Phi(x) = 4\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x$  και  $\Phi'(x) = 4\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x$

Από το ΘΜΤ στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  υπάρχει  $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο ώστε

$$\Phi'(\xi) = \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \Phi(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{4 + 4}{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{\pi} \Rightarrow$$

$$4\eta\mu\xi + 4\sigma\upsilon\nu\xi = \frac{16}{\pi} \Leftrightarrow \eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{4}{\pi}$$