Άσκηση 60

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

- Η ευθεία $\varepsilon_1 : y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
- Η ευθεία $\varepsilon_2 : y = 3x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

i) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη (ε) της συνάρτησης $f \circ g$ στο $+\infty$.

Έστω $(\varepsilon) : y = 6x - 3$

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xf(g(x)) - 6x^2 + \text{συν}x}{g(x) - 2x + 5}$.

Δίνεται επιπλέον ότι $f(x) \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και έστω F παράγουσα της f στο $[0, +\infty)$ με $F(1) = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

iv) Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα.

v) Να εξετάσετε αν η F έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

vi) Να δείξετε ότι $F(2) \geq 4$.

Λύση

i) Αφού η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = 1$$

Για το όριο της $f(x)$ στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right] = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

Ομοίως, αφού η $y = 3x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(g(x) - 3x) = 1$$

Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\cdot x\right] = 3\cdot(+\infty) = +\infty$$

ii) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(g(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(g(x))}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{x}\right) = \left(\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right) = 6 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(g(x)) - 6x] = \lim_{x\to+\infty}[f(g(x)) - 2g(x) + 2g(x) - 6x] =$$

$$\lim_{u\to+\infty}(f(u) - 2u) + 2\lim_{x\to+\infty}(g(x) - 3x) = 1 + 2(-2) = 1 - 4 = -3 = \beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της $f\circ g$ είναι η $\varepsilon : y = 6x - 3$

iii)

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{xf(g(x)) - 6x^2 + \text{συν}x}{g(x) - 2x + 5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(f(g(x)) - 6x + \dfrac{\text{συν}x}{x}\right)}{x\left(\dfrac{g(x)}{x} - 2 + \dfrac{5}{x}\right)}$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}x}{x}$ έχουμε

$$\left|\frac{\text{συν}x}{x}\right| = \frac{|\text{συν}x|}{|x|} \le \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\text{συν}x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ από ΚΠ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}x}{x} = 0$

$$L = \frac{-3 + 0}{3 - 2 + 0} = \frac{-3}{1} = -3$$

iv) Η F είναι παράγουσα της f στο $[0, +\infty)$ άρα $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$

Ισχύει $f(x) \ge 2x + 1$ για $x \ge 0 \Rightarrow F'(x) \ge 2x + 1 > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

v) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}\overset{\frac{\pm\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\notin\mathbb{R}$$

άρα η C_F δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

vi) Είναι $F'(x)=f(x)\geq 2x+1$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, οπότε

$$\int_1^2 F'(x)dx\geq\int_1^2(2x+1)dx\Rightarrow[F(x)]_1^2\geq[x^2+x]_1^2$$

$$F(2)-F(1)\geq(4+2)-(1+1)\Rightarrow F(2)-0\geq 6-2\Rightarrow F(2)\geq 4$$