Άσκηση 61

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , \ x < 1 \\ \alpha x + \beta & , \ x \geq 1 \end{cases}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 1.

i) Να βρείτε τις τιμές των α, β.

Έστω $\alpha = 3$, $\beta = -1$

ii) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ έχει κι άλλο κοινό σημείο B με τη C_f. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι η κλίση της C_f στο σημείο B είναι τετραπλάσια από την κλίση της C_f στο σημείο A.

iii) α′) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

β′) Να βρείτε την ευθεία $x = \kappa$ που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

Έστω $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x} & , \ x < 1 \\ \sqrt[3]{x-1} & , \ 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x+1}{3} & , \ x \geq 2 \end{cases}$

v) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $x_0 \in (-2, -1)$.

vi) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(\eta\mu x + 2) + f(\eta\mu x) = x - \pi$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\pi, 2\pi)$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, άρα και συνεχής, οπότε

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \alpha + \beta = 2$

$\lim_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \dfrac{x^3+1-(\alpha+\beta)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \dfrac{x^3+1-2}{x-1} \lim_{x\to1^-} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$

$\lim_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \dfrac{\alpha x+\beta-(\alpha+\beta)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \dfrac{\alpha(x-1)}{x-1} = \alpha$

πρέπει $\alpha = 3 \Rightarrow \beta = -1$

ii) Για $x < 1$ είναι $f(x) = x^3 + 1$ με $f'(x) = 3x^2$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο A είναι

$y - f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow y - \dfrac{7}{8} = \dfrac{3}{4}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$

Για τα κοινά σημεία της (ε) με τη C_f

- για $x < 1$

  $x^3+1 = \dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 4x^3-3x-1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ή $x = 1$ απορ.

- για $x \geq 1$

  $3x-1 = \dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4} \Rightarrow 12x-4 = 3x+5 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$

  Άρα το σημείο B είναι το $B(1, f(1)) = B(1,2)$

  Η κλίση στο B είναι $f'(1) = 3 = 4\cdot\dfrac{3}{4} = 4f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

iii) α′) Για τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$

- Αν $x < 1$: $x^3+1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$
- Αν $x \geq 1$: $3x-1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, απορρίπτεται

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx + \int_{1}^{2}(3x-1)\,dx = \frac{11}{2}$$

αφού

- $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right) = 2$
- $\displaystyle\int_{1}^{2}(3x-1)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2}-x\right]_{1}^{2} = \left(\frac{12}{2}-2\right)-\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{7}{2}$

β′) Έστω $x = \kappa$ η ευθεία που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, τότε

$\int_k^2 f(x)\,dx = \frac{E(\Omega)}{2} = \frac{11}{4}$. Επειδή $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{7}{2} > \frac{11}{4}$ το κ βρίσκεται στο διάστημα $(1,2) \Rightarrow 1 < \kappa < 2$

Έχουμε

$$\int_k^2 (3x-1)\,dx = \frac{11}{4} \Rightarrow \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_k^2 = \frac{11}{4}$$

$$\left(\frac{12}{2} - 2\right) - \left(\frac{3k^2}{2} - k\right) = \frac{11}{4}$$

$$4 - \frac{3k^2 - 2k}{2} = \frac{11}{4} \Rightarrow 16 - 2(3k^2 - 2k) = 11$$

$$16 - 6\kappa^2 + 4k = 11 \Rightarrow 6\kappa^2 - 4k - 5 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{136}}{12} = \frac{4 \pm 2\sqrt{34}}{12} = \frac{2 \pm \sqrt{34}}{6} \overset{1<\kappa<2}{=} \frac{2 + \sqrt{34}}{6}$$

iv) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \ x < 1 \\ 3 & , \ x \geq 1 \end{cases}$

$f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = για $x = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα 1-1 και αντιστρέφεται

Θέτω $y = f(x)$ οπότε

- για $x < 1$

  έχουμε $y = x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 = y - 1$

  Επειδή $x < 1 \Rightarrow x^3 < 1 \Rightarrow y - 1 < 1 \Rightarrow y < 2$

  – για $0 \leq x < 1$ είναι $1 \leq y < 2$ άρα $x = \sqrt[3]{1-y}$

  – για $x < 0$ είναι $y - 1 < 0 \Leftrightarrow y < 1$ και

    $(-x)^3 = 1 - y \Leftrightarrow -x = -\sqrt[3]{1-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{1-y}$.

- για $x \geq 1$

  έχουμε $y = 3x - 1 \Leftrightarrow 3x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3}$.

  $x \geq 1 \Rightarrow \frac{y+1}{3} \geq 1 \Rightarrow y + 1 \geq 3 \Rightarrow y \geq 2$.

Οπότε

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{1-x} & , \ x < 1 \\ \sqrt[3]{x-1} & , \ 1 \leq x < 2 \\ \frac{x+1}{3} & , \ x \geq 2 \end{cases}$$

v) Έστω (x,y) κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$. Τότε

$$f(x)=y \quad \text{και} \quad f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $f(x)+x=f(y)+y$

Θέτω $h(x)=f(x)+x\ ,\ x\in\mathbb{R}$

η h είναι γνησίως αύξουσα διότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει

- $x_1<x_2 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$
- $x_1<x_2$

άρα $h(x_1)<h(x_2)$ άρα h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1

Επομένως $h(x)=h(y)\Leftrightarrow x=y$ οπότε $f(x)=x$

- Αν $x<1$ τότε $x^3+1=x\Rightarrow x^3-x+1=0$

  Θέτω $g(x)=x^3-x+1$, $x<1\Rightarrow g'(x)=3x^2-1$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	1

  – $0\in g(\Delta_1)$ άρα υπάρχει μοναδική ρίζα x_0 στο $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

    επειδή $g(-2)=-5<0$ και $g(-1)=1>0$, η ρίζα $x_0\in(-2,-1)$.

  – $0\notin g(\Delta_2)$

  – $0\notin g(\Delta_3)$

  Συνεπώς, η $x_0\in(-2,-1)$ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x)=0$ στο $(-\infty,1)$.

- Αν $x\geq 1$: $3x-1=x\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ απορρίπτεται

Άρα οι $C_f,C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(-2,-1)$

vi) Θεωρούμε $w(x)=f^{-1}(\eta\mu x+2)+f(\eta\mu x)-x+\pi\ ,\ x\in[\pi,2\pi]$

w συνεχής στο $[\pi,2\pi]$

$w(\pi)=f^{-1}(2)+f(0)-\pi+\pi=1+1=2>0$

$w(2\pi)=f^{-1}(2)+f(0)-2\pi+\pi=2-\pi<0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\pi, 2\pi)$ ώστε $w(\xi) = 0$.

Η f^{-1} είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- $\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 1^-}(-\sqrt{1-x}) = 0$

  $\lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0$

  Επειδή $\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 1^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(1) = 0$, η f^{-1} είναι συνεχής στο 1

- $\lim_{x\to 2^-} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^-}\sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1$ $\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{3} = \frac{2+1}{3} = 1$

  Επειδή $\lim_{x\to 2^-} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(2) = 1$, η f^{-1} είναι συνεχής στο 2

Άρα η f^{-1} είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$