

## Άσκηση 62

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln f(x) \leq \alpha f(x) - \alpha$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(1) = 1$ , όπου  $0 < \alpha \neq 1$ .

i ) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ii ) Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{1}{f(x) - f'(0)x + f(0)}} + \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ .

iii ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

iv ) Να αποδείξετε ότι ισχύει  $f(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(e^x) > 1 - f'(e^x)$  για κάθε  $x \in [0, 1)$ .

v ) Να αποδείξετε ότι  $\int_1^e f(e^x) dx = f(\xi)(e - 1)$ , όπου  $\xi > 0$  και  $\ln \xi \in (1, e)$ .

vi ) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \ln f(x) dx \leq \alpha(f(\kappa) - 1)$ , όπου  $\kappa \in (0, 1)$ .

## Λύση

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = \ln f(x) - \alpha f(x) + \alpha$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$\ln f(x) \leq \alpha f(x) - \alpha \Rightarrow h(x) \leq 0 \Rightarrow h(x) \leq h(1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

άρα η συνάρτηση  $h$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $x_0 = 1 \in \mathbb{R}$

$$\text{η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } 1 \text{ με } h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \alpha f'(x)$$

άρα από Θ. Fermat ισχύει  $h'(1) = 0$ , οπότε

$$\frac{f'(1)}{f(1)} - \alpha f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1)(1 - \alpha) = 0 \stackrel{\alpha \neq 1}{\Rightarrow} f'(1) = 0$$

$f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R} \Rightarrow f'$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

- για  $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$
- για  $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'$		$0$	
		$-$	$+$
$f$	$+\infty$		$+\infty$
		$\downarrow$	$\uparrow$
		$1$	
		$OE$	

η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $1$  το  $f(1) = 1$  άρα

$$f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο  $x_0$ , με εξαίρεση το σημείο επαφής

Η εφαπτομένη στο  $x_0 = 0$  έχει εξίσωση  $y = f'(0)x + f(0)$ , οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow f(x) - f'(0)x - f(0) \geq 0$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και το  $=$  μόνο για  $x = 0$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - f'(0)x - f(0)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{f(x) - f'(0)x - f(0)}} = +\infty$$

Έχουμε

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x} \leq 1$$

$$e^{\frac{1}{f(x)-f'(0)x+f(0)}} - 1 \leq e^{\frac{1}{f(x)-f'(0)x+f(0)}} + \eta \mu \frac{1}{x} \leq e^{\frac{1}{f(x)-f'(0)x+f(0)}} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{1}{f(x)-f'(0)x+f(0)}} - 1 \right) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{1}{f(x)-f'(0)x+f(0)}} + 1 \right) = +\infty$$

άρα από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{1}{f(x)-f'(0)x+f(0)}} + \eta \mu \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

iii ) Έστω  $x_0 > 1$

Επειδή η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα ισχύει  $f'(x_0) > f'(1) = 0$

Η εφαπτομένη στο  $x_0$  έχει εξίσωση  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$f(x) \geq f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

Επειδή  $f'(x_0) > 0$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)] = +\infty$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

άρα αφού  $f$  συνεχής είναι  $f(A) = [f(1), +\infty) = [1, +\infty)$

iv ) Η συνάρτηση  $h(x) = f(e^x)$  είναι συνεχής στο  $[1, e]$  ως σύνθεση συνεχών.

Επειδή η  $f$  είναι κυρτή με  $f'(1) = 0$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ . Για κάθε  $x \in [1, e]$  ισχύει

$$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow e \leq e^x \leq e^e \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(e) \leq f(e^x) \leq f(e^e)$$

και το = μόνο για  $x = 1$  και  $x = e$  αντίστοιχα, οπότε

$$\int_1^e f(e) dx < \int_1^e f(e^x) dx < \int_1^e f(e^e) dx$$

$$(e-1)f(e) < \int_1^e f(e^x) dx < (e-1)f(e^e)$$

$$f(e) < \frac{1}{e-1} \int_1^e f(e^x) dx < f(e^e)$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[e, e^e]$  από ΘΕΤ η  $f$  παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ  $f(e)$  και  $f(e^e)$ . Συνεπώς, υπάρχει  $\xi \in (e, e^e)$  τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{1}{e-1} \int_1^e f(e^x) dx \Rightarrow \int_1^e f(e^x) dx = f(\xi)(e-1)$$

με  $e < \xi < e^e \Leftrightarrow \ln e < \ln \xi < \ln e^e \Leftrightarrow 1 < \ln \xi < e$ , άρα  $\ln \xi \in (1, e)$

v) Από την υπόθεση ισχύει  $\ln f(x) \leq \alpha f(x) - \alpha$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln f(x) dx &\leq \int_0^1 (\alpha f(x) - \alpha) dx \\ \int_0^1 \ln f(x) dx &\leq \alpha \int_0^1 f(x) dx - \alpha \int_0^1 1 dx \\ \int_0^1 \ln f(x) dx &\leq \alpha \left( \int_0^1 f(x) dx - 1 \right) \end{aligned}$$

Έστω  $F$  μια αρχική συνάρτηση της  $f$  στο  $[0, 1]$

Η  $F$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 1)$ .

άρα από ΘΜΤ για την  $F$  στο  $[0, 1]$  υπάρχει  $\kappa \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε

$$F'(\kappa) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} \Rightarrow f(\kappa) = F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx$$

Συνεπώς

$$\int_0^1 \ln f(x) dx \leq \alpha(f(\kappa) - 1), \quad \kappa \in (0, 1)$$