Άσκηση 63

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f' γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει $f(x) \geq 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

Επιπλέον, έστω F μία αρχική της f. Η C_F τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\left(F(x+1) - x^2 - 4x\right)\left(\sqrt{x+1} - 1\right)}{\eta\mu x} \cdot \ln x\right)$.

iii) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx > \pi + 2$.

iv) Να δείξετε ότι η C_F τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 1$ σε ένα ακριβώς σημείο.

v) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left(F(2) - F(0) - 4\right)x^5 + x^2 + 2026}{\left[e^2\left(F\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right) - 1\right]x^3 + x + 1} = -\infty$.

vi) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx + \int_0^{-1} F(x)dx > 0$.

Λύση

i) Έστω $h(x) = f(x) - (2x+2)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $h(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq h(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Επίσης, $h(0) = f(0) - (2 \cdot 0 + 2) = 2 - 2 = 0$. Άρα, η h παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ και h παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x) - 2$ άρα από Θεώρημα Fermat ισχύει

$$h'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) - 2 = 0 \Rightarrow f'(0) = 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 2 = 2x \Rightarrow y = 2x + 2$$

ii) Έχουμε

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(F(x+1)-x^2-4x)(\sqrt{x+1}-1)}{\eta\mu x}\cdot \ln x\right) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{F(x+1)-x^2-4x}{\eta\mu x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot x\ln x\right] = 0$$

διότι

- $$\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)-x^2-4x}{\eta\mu x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x+1)-2x-4}{\sigma\upsilon\nu x} =$$
  $$\lim_{x\to 0}(f(x+1)-2x-4) = f(1)-4 \in \mathbb{R}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$
  $$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

iii) Η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Οπότε $f(x) \geq 2x+2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ μόνο για $x = 0$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $0 \leq \eta\mu x \leq 1$ άρα

$$f(\eta\mu x) \geq 2\eta\mu x + 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\etaμx)\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\etaμx + 2)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\etaμx)\,dx > \Big[-2\sigmaυνx + 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (0+\pi) - (-2+0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\etaμx)\,dx > \pi + 2$$

iv) Θέτω $w(x) = F(x) - g(x) = F(x) - x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Η w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$w'(x) = F'(x) - 2x = f(x) - 2x$$

Είναι $f(x) \geq 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ μόνο για $x = 0$, επομένως $f(x) - 2x \geq 2 > 0 \Rightarrow w'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow w$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η $w(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Προφανής ρίζα το 1 αφού

$$w(1) = F(1) - 1^2 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

άρα και μοναδική. Οπότε, η C_F και η γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 - 1$ τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο, το $A(1,0)$

v)
$$L = \lim_{x\to-\infty} \frac{(F(2) - F(0) - 4)x^5 + x^2 + 2026}{[e^2(F(\frac{1}{e}) + 1) - 1]x^3 + x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(F(2) - F(0) - 4)x^5}{[e^2(F(\frac{1}{e}) + 1) - 1]x^3} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(2) - F(0) - 4}{e^2(F(\frac{1}{e}) + 1) - 1} \cdot x^2 = -\infty$$

διότι

- Από ΘΜΤ για την F στο διάστημα $[0,2]$ υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

  $$F'(\xi_1) = \frac{F(2) - F(0)}{2 - 0} \Rightarrow f(\xi_1) = \frac{F(2) - F(0)}{2}$$

  Για $x > 0 \overset{f' \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 2 > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

  Για $\xi_1 > 0$ έχουμε

  $$f(\xi_1) > f(0) \Rightarrow \frac{F(2) - F(0)}{2} > 2 \Rightarrow F(2) - F(0) > 4$$

- Από ΘΜΤ για την F στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$, υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ ώστε

$$F'(\xi_2) = \frac{F\left(\frac{1}{e}\right) - F(1)}{\frac{1}{e} - 1} \Rightarrow F\left(\frac{1}{e}\right) = f(\xi_2)\left(\frac{1-e}{e}\right) = -f(\xi_2)\left(\frac{e-1}{e}\right)$$

$$\xi_2 > 0 \Rightarrow f(\xi_2) > f(0) = 2 \Rightarrow -\frac{e-1}{e}f(\xi_2) < -\frac{e-1}{e}\cdot 2 \Rightarrow F\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{-2e+2}{e}$$

$$F\left(\frac{1}{e}\right) + 1 < \frac{-2e+2}{e} + 1 = \frac{2-e}{e} \Rightarrow e^2\left(F\left(\frac{1}{e}\right)+1\right) < e(2-e) = 2e - e^2$$

$$e^2\left(F\left(\frac{1}{e}\right)+1\right) - 1 < 2e - e^2 - 1 = -(e^2 - 2e + 1) = -(e-1)^2 < 0$$

vi) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\int_0^1 F(x)\,dx + \int_0^{-1} F(x)\,dx > 0$.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα θέτω $x = -u \Rightarrow dx = -du$

Για $x = 0 \Rightarrow u = 0$ και για $x = -1 \Rightarrow u = 1$. Οπότε

$$\int_0^{-1} F(x)\,dx = -\int_0^1 F(-u)\,du$$

Η αρχική παράσταση γίνεται

$$\int_0^1 F(x)\,dx - \int_0^1 F(-x)\,dx = \int_0^1 [F(x) - F(-x)]\,dx$$

Θέτω $\phi(x) = F(x) - F(-x)$, $x \in [0,1]$. Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με

$$\phi'(x) = F'(x) - F'(-x)(-1) = f(x) + f(-x)$$

Όμως $f(x) \geq 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $=$ για $x = 0$, άρα

- $f(x) \geq 2x + 2$
- $f(-x) \geq 2(-x) + 2 = -2x + 2$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) \geq (2x+2) + (-2x+2) = 4$$

Άρα $\phi'(x) \geq 4 > 0$ για κάθε $x \in [0,1] \Rightarrow \phi$ είναι γνησίως αύξουσα

Για $x \geq 0 \Rightarrow \phi(x) \geq \phi(0) = F(0) - F(0) = 0$ και το $=$ μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 F(x)\,dx + \int_0^{-1} F(x)\,dx > 0$$