Άσκηση 64

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

i) α′) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β′) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = \ln f(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια, να δείξετε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x^5 + 2x^3 + x - 4) = x$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(e^x)dx + \int_{1}^{0} f(-e^x)dx > e - \frac{1}{e}$.

v) Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[(f(e^x - 1) + 4)\ln x \cdot \text{ημ}\frac{1}{f'(x) - 1}\right]$.

Λύση

i) α′) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Έχουμε $f''(x) = 20x^3 + 12x = 4x(5x^2 + 3)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

Σ.Κ.
$(0, -4)$

β′) Για να ορίζεται η g πρέπει $f(x) > 0$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1$

Άρα $D_g = (1, +\infty)$

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι $1-1$ και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Έστω $M(x,y)$ κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$. Τότε ισχύει $\begin{cases} f(x) = y \\ f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη των προκύπτει $f(x) + x = f(y) + y$

Θέτω $\Phi(x) = f(x) + x$, τότε

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Rightarrow \Phi(x_1) < \Phi(x_2)$$

άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1, άρα $\Phi(x) = \Phi(y) \Leftrightarrow x = y$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 + x - 4 = x \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 - 4 = 0$$

Έστω $h(x) = x^5 + 2x^3 - 4,\ x \in [1,2]$

- Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$
- $h(1) = 1^5 + 2 \cdot 1^3 - 4 = -1 < 0$
- $h(2) = 2^5 + 2 \cdot 2^3 - 4 = 32 + 16 - 4 = 44 > 0$

Από Θεώρημα Bolzano η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (1,2)$. Επειδή $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική

iii) Έχουμε $f(x^5 + 2x^3 + x - 4) = x \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1}\left(f(f(x))\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$.

Από το ερώτημα (ii) η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_0 \in (1,2)$

iv) $I = \int\limits_{-1}^{0} f(e^x)dx + \int\limits_{1}^{0} f(-e^x)dx = \int\limits_{-1}^{0} f(e^x)dx - \int\limits_{0}^{1} f(-e^x)dx$

Η εφαπτομένη της f στο σημείο καμπής $A(0,-4)$ είναι η $y = x - 4$

- Για $x \geq 0$ η f είναι κυρτή άρα $f(x) \geq x - 4$ (η ισότητα μόνο για $x = 0$)

  Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq x - 4 \Rightarrow f(e^x) > e^x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{-1}^{0} f(e^x)dx > \int_{-1}^{0} (e^x - 4)dx = \Big[e^x - 4x\Big]_{-1}^{0} = 1 - \frac{1}{e} - 4 = -3 - \frac{1}{e}$$

- Για $x \leq 0$ η f είναι κοίλη άρα $f(x) \leq x - 4$ (η ισότητα μόνο για $x = 0$)

  Επειδή $-e^x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \leq x - 4 \Rightarrow f(-e^x) < -e^x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{0}^{1} f(-e^x)dx < \int_{0}^{1} (-e^x - 4)dx = \Big[-e^x - 4x\Big]_{0}^{1} = -e - 4 + 1 = -3 - e$$

$$\Rightarrow -\int_{0}^{1} f(-e^x)dx > e + 3$$

άρα $I > -3 - \frac{1}{e} + e + 3 = e - \frac{1}{e}$

v) Είναι $L = \lim\limits_{x\to 0}\left[(f(e^x - 1) + 4)\ln x \cdot \text{ημ}\frac{1}{f'(x) - 1}\right]$

$\lim\limits_{x\to 0}(f(e^x - 1) + 4)\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x - 1) - 4}{x} \cdot x\ln x$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(e^x - 1) - 4}{x} \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(e^x - 1)e^x}{1} \overset{f' \text{ συνεχής}}{=} f'(0) \cdot 1 = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(e^x - 1) + 4)\ln x\right] = 1 \cdot 0 = 0$

Είναι

$$\left|(f(e^x - 1) + 4)\ln x \cdot \text{ημ}\frac{1}{f'(x) - 1}\right| \leq |(f(e^x - 1) + 4)\ln x| \Leftrightarrow$$

$$-\left|(f(e^x-1)+4)\ln x\right| \leq (f(e^x-1)+4)\ln x \cdot \text{ημ}\frac{1}{f'(x)-1} \leq \left|(f(e^x-1)+4)\ln x\right|$$

άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $L=0$