

Άσκηση 65

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \beta x + 1 & , x \leq 0 \\ \ln(x+1) + \alpha & , x > 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$.

Έστω $\alpha = 1$ και $\beta = 1$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

iii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες $x_1 \in (-2, -1)$ και $x_2 \in (0, 1)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(\ln(x+1)) dx < \ln 4$.

v) Να λύσετε την εξίσωση $f'(4x) + f'(x) = f'(3x) + f'(2x)$.

vi) α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x \cdot \sin x f'(\eta \mu x) dx < 2 - \frac{\pi}{2}$.

Λύση

i) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει αρχικά να είναι συνεχής. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln 1 + \alpha = \alpha$$

Άρα $\alpha = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + \beta x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + \beta) = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

Άρα $\beta = 1$

Η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

ii) Για $\alpha = 1, \beta = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & , x \leq 0 \\ \ln(x+1) + 1 & , x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & , x > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	1	$+$
f	$-\infty$		$+\infty$

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & , x < 0 \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & , x > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$		$-$
f			

άρα η f είναι κοίλη στο \mathbb{R}

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x, x \in \mathbb{R}$

- Στο $[-2, -1]$ η h είναι συνεχής με $h(-2) = -1 < 0$ και $h(-1) = 1 > 0$ άρα από Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-2, -1)$ ώστε $h(x_1) = 0$

- Στο $[0, 1]$ η h είναι συνεχής με $h(0) = 1 > 0$ και $h(1) = \ln 2 - 1 < 0$ άρα από Bolzano υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$ ώστε $h(x_2) = 0$.

$$h'(x) = f'(x) - 2 = \begin{cases} -2x - 1 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} - 2 & , x > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
h'		$+$	0	$-$
h	$-\infty$			$-\infty$

- Στο διάστημα $(-\infty, -1/2]$ η h είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα $x_1 \in (-2, -1)$ είναι μοναδική
- Στο διάστημα $[-1/2, +\infty)$ η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα η ρίζα $x_2 \in (0, 1)$ είναι μοναδική

iv) Η f είναι κοίλη στο \mathbb{R} οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής

Άρα $f(x) \leq x + 1$ και το = μόνο για $x = 0$, οπότε

$f(\ln(x+1)) \leq \ln(x+1) + 1$ και το = μόνο για $\ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ άρα

$$\int_0^1 f(\ln(x+1)) dx < \int_0^1 (\ln(x+1) + 1) dx = \int_0^1 \ln(x+1) dx + \int_0^1 1 dx$$

$$\int_0^1 f(\ln(x+1)) dx < [(x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^1 + [x]_0^1$$

$$\int_0^1 f(\ln(x+1)) dx < 2 \ln 2 - 2 + 1 + 1 = 2 \ln 2 = \ln 4$$

v) $f'(4x) + f'(x) = f'(3x) + f'(2x) \Leftrightarrow f'(4x) - f'(3x) = f'(2x) - f'(x)$.

- Προφανής ρίζα το 0 αφού $f'(0) - f'(0) = f'(0) - f'(0)$
- Αν $x > 0$

Από ΘΜΤ για την f' στο $[x, 2x]$ και στο $[3x, 4x]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (x, 2x)$ και $\xi_2 \in (3x, 4x)$ τέτοια ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(2x) - f'(x)}{x} \text{ και } f''(\xi_2) = \frac{f'(4x) - f'(3x)}{x}$$

Είναι $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα f'' γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,
 οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \frac{f'(2x) - f'(x)}{x} < \frac{f'(4x) - f'(3x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(2x) - f'(x) < f'(4x) - f'(3x)$$

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

- Αν $x < 0$

Από ΘΜΤ για την f' στο $[4x, 3x]$ και στο $[2x, x]$ υπάρχουν $\xi_3 \in (4x, 3x)$ και $\xi_4 \in (2x, x)$ τέτοια ώστε

$$f''(\xi_3) = \frac{f'(4x) - f'(3x)}{x} \text{ και } f''(\xi_4) = \frac{f'(2x) - f'(x)}{x}$$

Είναι $f''(x) = -2$ για κάθε $x < 0$ άρα

$$f''(\xi_3) = f''(\xi_4) \Rightarrow f'(4x) - f'(3x) = f'(2x) - f'(x)$$

Όλες οι τιμές $x < 0$ επαληθεύουν την εξίσωση.

Τελικά $x \in (-\infty, 0]$

vi) α) Είναι $h(x) = f(x) - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Η h έχει μοναδικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < -\frac{1}{2} < x_2$

- στο $[x_1, -\frac{1}{2}]$ η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε

$$x_1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow h(x) \geq h(x_1) \Rightarrow h(x) \geq 0$$

- στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, x_2]$ η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε:

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq x_2 \Rightarrow h(x) \geq h(x_2) \Rightarrow h(x) \geq 0$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ ισχύει $h(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) - 2x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 2x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_1$ και $x = x_2$

β') Είναι

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x \cdot \sin x f'(\eta \mu x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x \cdot (f(\eta \mu x))' dx =$$

$$\left[x \cdot f(\eta \mu x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} f(-1) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta \mu x) dx = -\frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta \mu x) dx$$

Για $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow \eta \mu x \in [-1, 0] \subset [x_1, x_2]$ άρα

Ισχύει $f(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ και το = μόνο για $x = x_1, x = x_2$

οπότε

$$f(\eta\mu x) > 2\eta\mu x \Rightarrow -f(\eta\mu x) < -2\eta\mu x$$

άρα

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta\mu x) dx < -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2\eta\mu x dx = \left[2\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 2$$

$$-\frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(\eta\mu x) < 2 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow I < 2 - \frac{\pi}{2}$$