

## Άσκηση 66

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha}{\eta\mu x} + \frac{2\alpha - 1}{\sigma\upsilon\nu x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Το  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  είναι κρίσιμο σημείο της  $C_f$ .

i ) Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

ii ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα.

iii ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις  $C_f$ ,  $C_g$  και τις ευθείες  $x = \frac{\pi}{6}$  και  $x = \frac{\pi}{3}$ , όπου  $g(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

iv ) Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f(4x) > f(3x) + f(2x)$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ .

Έστω  $F$  μία αρχική της  $f$  στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

v ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $F$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

vi ) Να αποδείξετε ότι  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x f(x) dx < \frac{\pi}{3} F\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{144}$ .

## Λύση

i) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με

$$f'(x) = -\alpha \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} + (2\alpha - 1) \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Εφόσον το  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  είναι κρίσιμο σημείο τότε  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$

$$-\alpha \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + (2\alpha - 1) \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow -\alpha\sqrt{2} + (2\alpha - 1)\sqrt{2} = 0$$

$$-\alpha + 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) Για  $\alpha = 1$  είναι

$$f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x = \sigma\upsilon\nu^3 x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$f'$		-	0	+	
$f$	$+\infty$			$+\infty$	

$\xrightarrow{\text{OE}}$   
 $2\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left( \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty$$

$$f''(x) = -\frac{-\eta\mu^3 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu x \eta\mu (-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^4 x} =$$

$$\frac{\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} + \frac{1 + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$$

Για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι  $\eta\mu x > 0$  και  $\sigma\upsilon\nu x > 0$  οπότε  $f''(x) > 0$ .

Συνεπώς, η  $f$  είναι κυρτή στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

iii ) Το εμβαδόν του χωρίου είναι

$$E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 - \eta\mu^2 x} dx$$

Θέτω  $u = \eta\mu x$  οπότε  $du = \sin x dx$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \text{ και για } x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{άρα } E = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1 - u^2} du \text{ Είναι}$$

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1 - u)(1 + u)} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} = \frac{A(1 + u) + B(1 - u)}{(1 - u)(1 + u)}$$

$$\text{Πρέπει } 1 = (A - B)u + (A + B) \text{ οπότε } \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

Συμπεπώς

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du = \frac{1}{2} \left[ -\ln|1 - u| + \ln|1 + u| \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right) - \ln 3 \right) = \frac{1}{2} \left( \ln(2 + \sqrt{3})^2 - \ln 3 \right) =$$

$$\ln(2 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{3} = \ln \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)$$

iv ) Είναι  $f(x) + f(4x) > f(3x) + f(2x) \Leftrightarrow f(4x) - f(3x) > f(2x) - f(x)$

Από ΘΜΤ για την  $f$  στα διαστήματα  $[x, 2x]$  και  $[3x, 4x]$  με  $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$

- υπάρχει  $\xi_1 \in (x, 2x)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi_1) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$
- υπάρχει  $\xi_2 \in (3x, 4x)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi_2) = \frac{f(4x) - f(3x)}{x}$

Επειδή  $\xi_1 < \xi_2$  και  $f$  κυρτή  $\Rightarrow f'$  γνησίως αύξουσα

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(2x) - f(x)}{x} < \frac{f(4x) - f(3x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$f(2x) - f(x) < f(4x) - f(3x) \Leftrightarrow f(x) + f(4x) > f(3x) + f(2x)$$

v) Η  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $F'(x) = f(x) \geq 2\sqrt{2} > 0$  άρα  $F$  γνησίως αύξουσα στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η  $F$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  με  $F''(x) = f'(x)$

- Για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  είναι  $F''(x) = f'(x) < 0$ , άρα η  $F$  είναι κοίλη στο  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$
- Για κάθε  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι  $F''(x) = f'(x) > 0$ , άρα η  $F$  είναι κυρτή στο  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

vi) Είναι

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xf(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xF'(x)dx = [xF(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} F(x)dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xf(x)dx = \frac{\pi}{3}F\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}F\left(\frac{\pi}{4}\right) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} F(x)dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xf(x)dx = \frac{\pi}{3}F\left(\frac{\pi}{3}\right) - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} F(x)dx$$

Η εφαπτομένη της  $C_F$  στο σημείο  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  είναι

$$y - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Η  $F$  είναι κυρτή στο  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow F(x) \geq 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  για κάθε  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$  και η ισότητα μόνο για  $x = \frac{\pi}{4}$ , οπότε

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} F(x)dx > \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx = 2\sqrt{2}\left[\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} F(x)dx > \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{144}$$

Συνεπώς

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xf(x)dx < \frac{\pi}{3}F\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{144}$$