Άσκηση 67

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + \ln(x+1) - \ln 2$ και $g(x) = \ln \dfrac{x(x+1)}{2}$.

i) α′) Να εξετάσετε αν $f = g$.

β′) Αν $f \neq g$, να βρεθεί το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο ώστε $f = g$.

Έστω $x \in (0, +\infty)$

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

Έστω $f^{-1}(x) = \sqrt{2e^x + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}\ ,\ x \in \mathbb{R}$

iv) Να βρείτε τις εφαπτόμενες των C_g και $C_{f^{-1}}$ στα σημεία $M\left(1, g(1)\right)$ και $N\left(0, f^{-1}(0)\right)$ αντίστοιχα και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες και η $y = x$ συντρέχουν σε σημείο, το οποίο και να βρεθεί.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^3 g(x)dx$.

Λύση

i) α′) Είναι $f(x) = \ln x + \ln(x+1) - \ln 2$

πρέπει $x > 0$ και $x + 1 > 0$ άρα $x > 0$ οπότε $D_f = (0, +\infty)$

και $g(x) = \ln \dfrac{x(x+1)}{2}$

πρέπει $x(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 0$ άρα $D_g = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Επειδή $D_f \neq D_g$ οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες

β′) Ισχύει $f(x) = \ln x + \ln(x+1) - \ln 2 = \ln(x(x+1)) - \ln 2 = \ln \dfrac{x(x+1)}{2} = g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα το ευρύτερο υποσύνολο είναι το $(0, +\infty)$

ii) Για $x \in (0, +\infty)$ είναι $g(x) = f(x) = \ln x + \ln(x+1) - \ln 2$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} 0$$

$g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} 0$$

$g''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η g είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$

Είναι $g(A) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} g(x), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

iii) Είναι $f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > 0$ για $x > 0$

άρα είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς 1-1 οπότε αντιστρέφεται

Θέτω

$$y = f(x) \Rightarrow y = \ln \frac{x^2 + x}{2} \Leftrightarrow e^y = \frac{x^2 + x}{2} \Leftrightarrow x^2 + x = 2e^y$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2e^y + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2e^y + \frac{1}{4}$$

Επειδή $x > 0$ ισχύει $x + \dfrac{1}{2} > 0$ άρα

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{2e^y + \frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt{2e^y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{2e^x + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}$ με $x \in f(A) = g(A) = \mathbb{R}$

iv) • Εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1,g(1))$

$$\varepsilon_1 : y - g(1) = g'(1)(x-1) \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

• Εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N(0, f^{-1}(0))$

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $(f^{-1})'(x) = \dfrac{2e^x}{2\sqrt{2e^x + \dfrac{1}{4}}}$

$$\varepsilon_2 : y - f^{-1}(0) = \left(f^{-1}\right)'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{3}x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 1$$

Για το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 3x - 3 \\ 3y = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = -3 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 4y = -6 \\ 6x - 9y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x - 9y = -9 \\ -5y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = -9 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

άρα το σημείο τομής είναι το $A(3,3)$. Επειδή οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση $y = x$, οι τρεις ευθείες συντρέχουν στο σημείο A.

v) Είναι

$$\int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 (\ln x + \ln(x+1) - \ln 2)\, dx =$$

$$\int_2^3 \ln x dx + \int_2^3 \ln(x+1)dx - \int_2^3 \ln 2 dx =$$

$$\int_2^3 (x)' \ln x dx + \int_2^3 (x+1)' \ln(x+1)dx - \int_2^3 \ln 2 dx =$$

$$\Big[x\ln x - x\Big]_2^3 + \Big[(x+1)\ln(x+1) - x\Big]_2^3 - \Big[x\ln 2\Big]_2^3 =$$

$$(3\ln 3 - 3 - 2\ln 2 + 2) + (4\ln 4 - 3 - 3\ln 3 + 2) - (3\ln 2 - 2\ln 2)$$

$$4\ln 4 - 3\ln 2 - 2 = 8\ln 2 - 3\ln 2 - 2 = 5\ln 2 - 2$$