

Άσκηση 68

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + 2\ln x}$, $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1} .

ii) Να αποδείξετε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο, η οποία και να βρεθεί.

iii) Να δείξετε ότι $f(x) \leq f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$.

Έστω F, G αρχικές των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_e^{e^2} F(\ln x) dx > F(1)(e^2 - e) + e$.

v) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = F(x) - G(x)$, $x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

vi) Να μελετήσετε την Φ ως προς την κυρτότητα.

vii) Να δείξετε ότι $\int_1^e \frac{1}{x} \Phi(x) dx < \Phi(e) - \Phi'(e)$.

Λύση

i) Είναι $f(x) = \sqrt{1+2\ln x}$, $x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow 1 + 2\ln x_1 < 1 + 2\ln x_2 \Rightarrow \sqrt{1+2\ln x_1} < \sqrt{1+2\ln x_2}$$

Άρα $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ άρα και 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται

Θέτω $y = f(x)$ με $y \geq 0$

$$y = \sqrt{1+2\ln x} \Leftrightarrow y^2 = 1+2\ln x \Leftrightarrow 2\ln x = y^2 - 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{y^2 - 1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{y^2 - 1}{2}}$$

Άρα $f^{-1}(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{2}}$, $x \geq 0$

ii) Για να βρω τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ λύνω την εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) - f(x) = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $d(x) = f^{-1}(x) - f(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{2}} - \sqrt{1+2\ln x}$ για κάθε $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$.

Η d είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ με

$$d'(x) = (f^{-1})'(x) - f'(x) = xe^{\frac{x^2 - 1}{2}} - \frac{1}{x\sqrt{1+2\ln x}}$$

και

$$d''(x) = (f^{-1})''(x) - f''(x)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\bullet (f^{-1})''(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2 - 1}{2}} = (1 + x^2)e^{\frac{x^2 - 1}{2}} > 0$$

$$\bullet f''(x) = -\frac{\sqrt{1+2\ln x} + \frac{1}{\sqrt{1+2\ln x}}}{x^2(1+2\ln x)} < 0$$

Επομένως, $d''(x) = (f^{-1})''(x) - f''(x) > 0$ για κάθε $x > e^{-\frac{1}{2}}$, άρα η d' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$

Επειδή $d'(1) = 0$ η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική για την d'

Συνεπώς

$$\bullet \text{ Για } e^{-\frac{1}{2}} \leq x < 1 \Leftrightarrow d'(x) < d'(1) = 0$$

οπότε η d είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, 1 \right]$

- Για $x > 1 \Leftrightarrow d'(x) > d'(1) = 0$

οπότε η d είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

x	$e^{-\frac{1}{2}}$	1	$+\infty$
d'		-	+
d		0	0

OE

άρα $d(x) \geq d(1) = 0$ για κάθε $x \in [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ και το = μόνο για $x = 1$

οπότε κοινό σημείο είναι το $A(1, 1)$ και αφού $f'(1) = (f^{-1})'(1) = 1$, οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν κοινή εφαπτομένη την $y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x$.

- iii) • Είναι $(f^{-1})''(x) > 0$ άρα η f^{-1} είναι κυρτή στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$. Επειδή η $y = x$ είναι εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x = 1$ η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής

$$f^{-1}(x) \geq x$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

- Είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$. Επειδή η $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής

$$f(x) \leq x$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

άρα

$$f(x) \leq x \leq f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) \leq f^{-1}(x)$$

για κάθε $x \in [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ και το = μόνο για $x = 1$

- iv) F αρχική της f οπότε $F'(x) = f(x) = \sqrt{1 + 2 \ln x}$ και $F''(x) = f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 + 2 \ln x}} > 0$

για κάθε $x \in [e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ συνεπώς η F είναι κυρτή

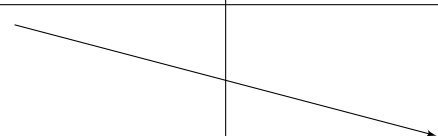
Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση

$$y - F(1) = f(1)(x - 1) \Rightarrow y - F(1) = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 + F(1)$$

άρα $F(x) \geq x - 1 + F(1)$ για κάθε $x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ και το = για $x = 1$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_e^{e^2} F(\ln x) dx \stackrel{u=\ln x}{=} \int_1^2 F(u)e^u du > \int_1^2 (u-1+F(1))e^u du \\
 I &> \int_1^2 (u-1)e^u du + F(1) \int_1^2 e^u du \\
 I &> \left[(u-1)e^u - e^u \right]_1^2 + F(1) \left[e^u \right]_1^2 \\
 I &> e + F(1)(e^2 - e) \Rightarrow I > F(1)(e^2 - e) + e
 \end{aligned}$$

v) $\Phi'(x) = (F(x) - G(x))' = f(x) - f^{-1}(x) \leq 0$ για κάθε $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$ και το = μόνο για $x = 1$



x	$e^{-\frac{1}{2}}$	1	$+\infty$	
Φ'		-	0	-
Φ				

Άρα $\Phi'(x) \leq 0$ και Φ συνεχής στο 1, άρα η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$.

vi) Η συνάρτηση Φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ με

$$\Phi''(x) = (f(x) - f^{-1}(x))' = f'(x) - (f^{-1})'(x) = -d'(x)$$

$$\Phi''(x) = 0 \Leftrightarrow -d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$e^{-\frac{1}{2}}$	1	$+\infty$	
Φ''		+	0	-
Φ				

ΣΚ

vii) Είναι

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^e \frac{1}{x} \Phi(x) dx = \int_1^e (\ln x)' \Phi(x) dx = \\
 &= \left[\ln x \cdot \Phi(x) \right]_1^e - \int_1^e \ln x \cdot \Phi'(x) dx = \Phi(e) - \int_1^e \ln x \cdot \Phi'(x) dx
 \end{aligned}$$

η Φ είναι κοίλη στο $[1, e]$ άρα η Φ' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύει

$$x \leq e \Rightarrow \Phi'(x) \geq \Phi'(e) \stackrel{\ln x \geq 0}{\Rightarrow} \ln x \cdot \Phi'(x) \geq \ln x \cdot \Phi'(e)$$

άρα

$$\int_1^e \ln x \cdot \Phi'(x) dx > \Phi'(e) \int_1^e \ln x dx = \Phi'(e) \left[x \ln x - x \right]_1^e = \Phi'(e)$$

συνεπώς

$$\int_1^e \frac{1}{x} \Phi(x) dx < \Phi(e) - \Phi'(e)$$