Άσκηση 69

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln f(x) - \alpha}{x-1} = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και στη συνέχεια ότι $f'(1) = 0$.

ii) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

Έστω G μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$

iii) Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

iv) α΄) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 G(e^x)dx > e + G(1) - 2$.

β΄) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 G(e^x)dx < G(e) - 1$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{G''(\text{ημ}\alpha - 1)}{x-2} - \dfrac{G''(e^{\beta^2})}{x+1} = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-1, 2)$, όπου $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\beta \neq 0$.

Λύση

i) Θέτω $h(x) = \dfrac{\ln f(x) - \alpha}{x-1}$ για $x \neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής, άρα

$\lim\limits_{x\to 1}(\ln f(x) - \alpha) = \lim\limits_{x\to 1}[h(x)(x-1)] = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \ln f(1) - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln f(x)}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)-f(1)} \cdot \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right] = 0$$

όμως

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln f(x)}{f(x)-f(1)} \overset{u=f(x)}{=} \lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u-1} \overset{DLH}{=} \lim_{u\to 1} \frac{1}{u} = 1$$

Επομένως

$$1 \cdot f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = 0$$

ii) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R} \Rightarrow f'$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

- για $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$
- για $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$
		OE	

η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1$ άρα $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το = μόνο για $x = 1$

iii) Η G είναι μια αρχική της f, άρα $G'(x) = f(x)$

- Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow G'(x) > 0$

  άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

- Ισχύει $G''(x) = f'(x)$

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 1 $\quad\quad$ $+\infty$	
G''	$-$	0 $\quad$ $+$
G		

Σ.Κ.
$(1, G(1))$

iv) α′) Η G είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - G(1) = G'(1)(x-1) \Rightarrow y - G(1) = f(1)(x-1) \Rightarrow y = x + G(1) - 1$$

Άρα $G(x) \geq x + G(1) - 1$ για κάθε $x \geq 1$ και το = για $x = 1$

Για $x \in [0, 1]$ είναι $e^x \geq 1$ οπότε $G(e^x) \geq e^x + G(1) - 1$ και το = για $x = 0$ άρα

$$\int_0^1 G(e^x)dx > \int_0^1 (e^x + G(1) - 1)dx = \Big[e^x + (G(1)-1)x\Big]_0^1 = e + G(1) - 2$$

β′) Για το $\displaystyle\int_0^1 G(e^x)dx < G(e) - 1$

Θέτω $u = e^x \Rightarrow dx = \dfrac{1}{u}du$

Για $x = 0 \Rightarrow u = 1$ και $x = 1 \Rightarrow u = e$

άρα

$$\int_0^1 G(e^x)dx = \int_1^e \frac{G(u)}{u}du = \int_1^e (\ln u)'G(u)du =$$

$$\Big[\ln u \cdot G(u)\Big]_1^e - \int_1^e \ln u \cdot G'(u)du = G(e) - \int_1^e \ln u \cdot f(u)du$$

Για $x \geq 1 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(1) = 1 \overset{lnx \geq 0}{\Rightarrow} lnx \cdot f(x) \geq lnx$ και το = μόνο για $x = 1$ οπότε

$$\int_1^e \ln u \cdot f(u)du > \int_1^e \ln u du = \Big[u \ln u - u\Big]_1^e = 1 \Rightarrow$$

$$-\int_1^e \ln u \cdot f(u)du < -1 \Rightarrow G(e) - \int_1^e \ln u \cdot f(u)du < G(e) - 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 G(e^x)dx < G(e) - 1$$

v) Είναι

$$\frac{G''(\eta\mu\alpha-1)}{x-2}-\frac{G''(e^{\beta^2})}{x+1}=0 \Rightarrow G''(\eta\mu\alpha-1)(x+1)-G''(e^{\beta^2})(x-2)=0$$

Θέτω $h(x)=G''(\eta\mu\alpha-1)(x+1)-G''(e^{\beta^2})(x-2),\ x\in[-1,2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1,2]$ ως πολυωνυμική

- $h(-1)=3G''(e^{\beta^2})>0$
- $h(2)=3G''(\eta\mu\alpha-1)<0$

διότι

- Για $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $-1<\eta\mu\alpha-1<0\Rightarrow \eta\mu\alpha-1<1$

  Επειδή η $G''=f'$ είναι γνησίως αύξουσα με $G''(1)=0$ προκύπτει ότι

  $G''(\eta\mu\alpha-1)<G''(1)=0$

- Για $\beta\neq 0$ είναι $\beta^2>0\Rightarrow e^{\beta^2}>1\Rightarrow G''(e^{\beta^2})>G''(1)=0$

άρα $h(-1)\cdot h(2)<0$ οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,2)$ και h πολυώνυμο 1ου βαθμού, άρα η ρίζα μοναδική.