Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 & , \ x < 0 \\ \kappa & , \ x = 0 \\ x^4 + x^3 + 1 & , \ x > 0 \end{cases}$, όπου $\kappa = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$.

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{(f(x) - 2)(x - 3)}{x^3 - 3x^2 + x - 3} dx$.

Λύση

i)

$$\kappa = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2+3x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^2+3} = \frac{4}{4} = 1$$

Άρα $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+x^2+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^4+x^3+1) = 1$

Άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, άρα f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii) Κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη και τα εσωτερικά σημεία όπου $f'(x) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+x^2+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^4+x^3+1-1}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+x^2) = 0$

Είναι $f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2x & , \ x \le 0 \\ 4x^3+3x^2 & , \ x > 0 \end{cases}$

Για $x \le 0$ έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\dfrac{2}{3}$

Για $x > 0$ έχουμε $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3+3x^2 = x^2(4x+3) \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\dfrac{3}{4}$ που απορρίπτονται

Άρα κρίσιμα σημεία: $x = -\dfrac{2}{3}$, $x = 0$

iii) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2x & , \ x \le 0 \\ 4x^3+3x^2 & , \ x > 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Τ.Μ. $f(-\frac{2}{3}) = \frac{31}{27}$ Τ.Ε. $f(0) = 1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\smile$	

Σ.Κ.

$K\left(-\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$

iv) Η C_f τέμνει την ευθεία $y = 1$ στα σημεία όπου $f(x) = 1$.

Για $x \leq 0$ έχουμε $x^3 + x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ,\ x = -1$

Για $x > 0$ έχουμε $x^4 + x^3 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ,\ x = -1$ απορρίπτονται

Για $x \in [-1, 0]$ ισχύει $f(x) - 1 = x^3 + x^2 = x^2(x+1) \geq 0$ και

για $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x) - 1 = x^4 + x^3 = x^3(x+1) \geq 0$

άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{0} \Big(f(x) - 1\Big)dx + \int_{0}^{1} \Big(f(x) - 1\Big)dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\,dx + \int_{0}^{1} (x^4 + x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{8}{15}$$

v)

$$I = \int_{0}^{1} \frac{(f(x) - 2)(x-3)}{x^3 - 3x^2 + x - 3}dx = \int_{0}^{1} \frac{(x^4 + x^3 - 1)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}dx = \int_{0}^{1} \frac{x^4 + x^3 - 1}{x^2 + 1}dx$$

Από διαίρεση πολυωνύμων προκύπτει $\dfrac{x^4 + x^3 - 1}{x^2 + 1} = x^2 + x - 1 - \dfrac{x}{x^2 + 1}$, άρα

$$I = \int_{0}^{1} \Big(x^2 + x - 1\Big)dx - \int_{0}^{1} \frac{x}{x^2 + 1}dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{0}^{1} - \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\right]_{0}^{1} =$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln 2$$