Άσκηση 70

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x \ , \ x > 0$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(2) \quad (1)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

iii) Να βρείτε σημείο M της C_f στο οποίο η εφαπτομένη διαπερνά τη C_f και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την εξίσωσή της.

Έστω F μία αρχική της f με $F(1) < 0$

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_e^{e^2} F(\ln x)dx = e^2F(2) - eF(1) - e^2\ln 2$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x) = 0 \quad (2)$ έχει μοναδική λύση.

vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho, 2)$ ώστε

$$f\left(e^{\xi-\rho} + \kappa - 1\right)e^{\xi-\rho} = -\frac{F\left(e^{\xi-\rho} + \kappa - 1\right)}{\xi - 2}$$

όπου ρ η μικρότερη ρίζα της (1) και κ η ρίζα της (2)

Λύση

i) Είναι $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x^2},\ x > 0$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$+\infty \searrow$		$\nearrow +\infty$	

OE
$f(1) = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty(1+0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \ln x = 0 + \infty = +\infty$$

Το σύνολο τιμών είναι το $f((0,+\infty)) = [1,+\infty)$

ii) Είναι $f(2) = \dfrac{1}{2} + \ln 2 > 1$

- Στο $A_1 = (0,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και $f(A_1) = [1,+\infty)$

  Το $f(2) \in (1,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0,1)$ ώστε $f(x_1) = f(2)$

- Στο $A_2 = (1,+\infty)$ έχουμε $f(x) = f(2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε το 2 είναι μοναδική ρίζα

Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, την $\rho \in (0,1)$ και την $x = 2$

iii) Για να διαπερνά η εφαπτομένη τη C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, πρέπει το M να είναι σημείο καμπής

Είναι $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ και $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2-x}{x^3}$

x	0		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		$\cup$		$\cap$	

ΣΚ
$(2, f(2))$

η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \ln 2$$

iv) Είναι

$$I = \int_e^{e^2} F(\ln x)dx = \int_e^{e^2} (x)' F(\ln x)dx = \Big[xF(\ln x)\Big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\left(F(\ln x)\right)' dx =$$

$$e^2F(2) - eF(1) - \int_e^{e^2} x \cdot f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx = e^2F(2) - eF(1) - \int_e^{e^2} f(\ln x)dx$$

Στο ολοκλήρωμα $J = \displaystyle\int_e^{e^2} f(\ln x)dx$ θέτω $u = \ln x \Rightarrow dx = e^u du$

για $x = e \Rightarrow u = 1$ και για $x = e^2 \Rightarrow u = 2$

$$J = \int_1^2 f(u)e^u du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} + \ln u\right) e^u du = \int_1^2 \left(e^u \ln u\right)' du = \Big[e^u \ln u\Big]_1^2 = e^2 \ln 2$$

άρα

$$I = e^2F(2) - eF(1) - e^2 \ln 2$$

v) Είναι $F'(x) = f(x) \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Είναι $F''(x) = f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
F''		$-$	0	$+$	
F		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ $(1, F(1))$		

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο καμπής $x_0 = 1$ έχει εξίσωση

$$y - F(1) = F'(1)(x-1) \xRightarrow{F'(1)=f(1)=1} y = x - 1 + F(1)$$

Επειδή η F είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ η C_F βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της για κάθε $x \geq 1$ με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $F(x) \geq x - 1 + F(1)$

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 + F(1)) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

άρα υπάρχει α κοντά στο $+\infty$ τέτοιο ώστε $F(\alpha) > 0$

- Η F είναι συνεχής στο διάστημα $[1, \alpha]$
- $F(1) \cdot F(\alpha) < 0$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\kappa \in (1, \alpha) \subset (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $F(\kappa) = 0$ και αφού F γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ η ρίζα κ είναι μοναδική.

vi) Είναι

$$f\left(e^{\xi-\rho}+\kappa-1\right)e^{\xi-\rho}=-\frac{F\left(e^{\xi-\rho}+\kappa-1\right)}{\xi-2}\Leftrightarrow$$

$$(\xi-2)f\left(e^{\xi-\rho}+\kappa-1\right)e^{\xi-\rho}+F\left(e^{\xi-\rho}+\kappa-1\right)=0$$

$$\left((\xi-2)F\left(e^{\xi-\rho}+\kappa-1\right)\right)'=0$$

Θέτω $w(x)=(x-2)F(e^{x-\rho}+\kappa-1)\ ,\ x>0$

- Η w είναι συνεχής στο $[\rho,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- Η w είναι παραγωγίσιμη στο $(\rho,2)$
- $w(2)=(2-2)F(e^{2-\rho}+\kappa-1)=0$
- $w(\rho)=(\rho-2)F(\kappa)=0$

άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho,2)$ τέτοιο ώστε

$$w'(\xi)=0\Rightarrow F(e^{\xi-\rho}+\kappa-1)+(\xi-2)f(e^{\xi-\rho}+\kappa-1)e^{\xi-\rho}=0$$

$$(\xi-2)f(e^{\xi-\rho}+\kappa-1)e^{\xi-\rho}=-F(e^{\xi-\rho}+\kappa-1)\Rightarrow$$

$$f(e^{\xi-\rho}+\kappa-1)e^{\xi-\rho}=-\frac{F(e^{\xi-\rho}+\kappa-1)}{\xi-2}$$