Άσκηση 71

i) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή , η οποία έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda>0$. Επίσης, το $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α΄) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

β΄) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lambda$.

γ΄) Ισχύει $f(x)>\lambda x+\beta$ κοντά στο $+\infty$.

ii) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\varepsilon_1: y=\lambda_1 x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\lambda_2 x+\beta_2$ ασύμπτωτες, αντίστοιχα, των C_f και C_g στο $+\infty$, όπου $\lambda_1,\lambda_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ και $\lambda_2>0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda_1\lambda_2 x+\lambda_1\beta_2+\beta_1$ είναι ασύμπτωτη της $C_{f\circ g}$ στο $+\infty$.

iii) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, που έχει ασύμπτωτη την $y=2x-1$ στο $+\infty$. Επίσης, συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή με $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, που έχει ασύμπτωτη την $y=x$ στο $+\infty$.

α΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi=f\circ g$ είναι κυρτή.

β΄) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(x^2\text{ημ}\dfrac{1}{x}-x\right)(\varphi(x)-2x+1)}$.

Λύση

i) α′) Αφού η $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lambda$

Επομένως
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot x\right) = \lambda \cdot (+\infty) \overset{\lambda \geq 0}{=} +\infty$$

β′) Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ στο $\mathbb{R}$, τότε
$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(f(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

γ′) Θέτω $\phi(x) = f(x) - (\lambda x + \beta)$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi'(x) = f'(x) - \lambda$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα ϕ' γνησίως αύξουσα

με $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) - \lambda = 0$

Συνεπώς $\phi'(x) < 0$, άρα η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (\lambda x + \beta) = 0$ και η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $\phi(x) > 0 \Rightarrow f(x) - (\lambda x + \beta) > 0 \Rightarrow f(x) > \lambda x + \beta$ κοντά στο $+\infty$

ii) Είναι
$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(g(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(g(x))}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{x}\right)$$

Επειδή $\lambda_2 > 0$, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Θέτοντας $u = g(x)$, το όριο γίνεται
$$\lambda = \lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

και

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} [f(g(x)) - (\lambda_1\lambda_2)x] = \lim_{x\to+\infty} [f(g(x)) - \lambda_1 g(x) + \lambda_1 g(x) - \lambda_1\lambda_2 x] =$$
$$\lim_{x\to+\infty} [f(g(x)) - \lambda_1 g(x)] + \lambda_1 \lim_{x\to+\infty} [g(x) - \lambda_2 x] =$$
$$\lim_{u\to+\infty} [f(u) - \lambda_1 u] + \lambda_1\beta_2 = \beta_1 + \lambda_1\beta_2$$

Άρα η ασύμπτωτη της $C_{f\circ g}$ στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = (\lambda_1\lambda_2)x + \beta_1 + \lambda_1\beta_2$

iii) α′) Είναι $D_\varphi = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Η $\varphi(x) = f(g(x))$ στο $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

- Επειδή η g είναι κυρτή, η g' είναι γνησίως αύξουσα και $g'(x) > 0$ άρα
$$0 < g'(x_1) < g'(x_2) \quad (1)$$
- Είναι $g'(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x_1 < x_2$ ισχύει $g(x_1) < g(x_2)$
- Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(x) > 0$, άρα
$$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow 0 < f'(g(x_1)) < f'(g(x_2)) \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει
$$f'(g(x_1)) \cdot g'(x_1) < f'(g(x_2)) \cdot g'(x_2) \Rightarrow \varphi'(x_1) < \varphi'(x_2)$$

Άρα η φ' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

β΄) Σύμφωνα με το ερώτημα (ii), οι ασύμπτωτες των C_f, C_g στο $+\infty$ είναι αντίστοιχα οι ευθείες $y = \lambda_1 x + \beta_1$ με $\lambda_1 = 2, \beta_1 = -1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$ με $\lambda_2 = 1, \beta_2 = 0$.

Η ασύμπτωτη της $\varphi = f \circ g$ στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ με
$$\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$\beta = \lambda_1 \beta_2 + \beta_1 = 2 \cdot 0 + (-1) = -1$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon) : y = 2x - 1$ είναι η ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$, οπότε
$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - (2x - 1)] = 0$$

Επειδή η φ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, από το ερώτημα (i) ισχύει $\varphi(x) > 2x - 1$ κοντά στο $+\infty$.

Επομένως
$$\varphi(x) - 2x + 1 > 0 \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varphi(x) - 2x + 1} = +\infty$$

Είναι
$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \text{ημ} \frac{1}{x} - x \right) \overset{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{u \to 0^+} \left(\frac{\text{ημ} u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \to 0^+} \frac{\text{ημ} u - u}{u^2} \overset{DLH}{=} \frac{\text{συν} u - 1}{2u} = 0$$

Όμως, για $x > 0$ έχουμε $\text{ημ} x < x \overset{x \to \frac{1}{x}}{\Rightarrow} \text{ημ} \frac{1}{x} < \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 \text{ημ} \frac{1}{x} < x \Rightarrow x^2 \text{ημ} \frac{1}{x} - x < 0$

άρα
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(x^2 \text{ημ} \frac{1}{x} - x \right) (\varphi(x) - 2x + 1)} =$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x^2 \text{ημ} \frac{1}{x} - x} \cdot \frac{1}{\varphi(x) - 2x + 1} \right] = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$