

Άσκηση 72

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, $x > 0$, $\alpha > 0$.

- i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να δείξετε ότι το σημείο καμπής ανήκει στη C_g , όπου $g(x) = x(1 - 2 \ln x)$, $x > 0$.
- ii) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έστω $\alpha = 2$

- iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Δίνεται F αρχική της f με $F(1) = 1$

- iv) Να μελετήσετε την F ως προς τα κοίλα.

v) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(e^x) dx > 2e - 3$.

vi) Να αποδείξετε ότι $2 \int_1^2 f(x) dx + \int_3^1 f(x) dx < 0$.

- vii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$3 \int_0^1 (f(x) + 2x \ln x) dx \cdot x^3 + \frac{2}{e^2 + 1} \int_1^e (f(x) - 2x^2) dx \cdot x^2 = -x - \kappa$$

όπου $-2 < \kappa < 0$, έχει ακριβώς μία ρίζα, που βρίσκεται στο $(0, 1)$.

Λύση

i) Είναι $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2\alpha x - 2 \ln x - 2$ και $f''(x) = 2\alpha - \frac{2}{x}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}.$$

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
f''		-	+
f		↘	↗

Σ.Κ.
 $(\frac{1}{\alpha}, f(\frac{1}{\alpha}))$

Το σημείο καμπής είναι το είναι το $A(\frac{1}{\alpha}, f(\frac{1}{\alpha}))$ με $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} + \frac{2 \ln \alpha}{\alpha}$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \ x = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{x}, \ x > 0$$

$$\text{και } y = \frac{1}{\alpha} + \frac{2 \ln \alpha}{\alpha} \Rightarrow y = x + 2x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = x - 2x \ln x = x(1 - 2 \ln x)$$

άρα το σημείο καμπής ανήκει στη γραφική παράσταση της $g(x) = x(1 - 2 \ln x)$, $x > 0$

ii) Η εφαπτομένη στο $M(1, f(1))$ είναι $(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \stackrel{(0,0) \in (\varepsilon)}{\Rightarrow} 0 - \alpha = (2\alpha - 2)(0 - 1) \Rightarrow -\alpha = -2\alpha + 2 \Rightarrow \alpha = 2$

iii) Για $\alpha = 2$ είναι $f'(x) = 4x - 2 \ln x - 2$ και $f''(x) = 4 - \frac{2}{x}$

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f''		-	+
f'		↘	↗

ΟΕ
 $f(2) = 2 \ln 2$

Είναι $f'(x) \geq f(2) = 2 \ln 2 > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

• Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 - 2x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

• Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 2x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right] = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Συνεπώς, $f(A) = (0, +\infty)$

iv) Είναι $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $F''(x) = f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα F κυρτή στο $(0, +\infty)$

v) Επειδή η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της, με εξαίρεση το σημείο επαφής

Η εφαπτομένη της C_F στο 1 έχει εξίσωση

$$(\varepsilon) : y - F(1) = F'(1)(x - 1) \Rightarrow y - F(1) = f(1)(x - 1) \Rightarrow$$

$$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

άρα $F(x) \geq 2x - 1$ για κάθε $x > 0$ και το = μόνο για $x = 1$, οπότε

$$F(e^x) \geq 2e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και το = μόνο για } x = 0$$

άρα

$$\int_0^1 F(e^x) dx > \int_0^1 (2e^x - 1) dx = \left[2e^x - x \right]_0^1 = 2e - 3$$

vi) ά' τρόπος

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_3^1 f(x) dx < 0 \Rightarrow 2 \int_1^2 f(x) dx < \int_1^3 f(x) dx$$

$$2 \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \int_2^3 f(x) dx$$

$$\left[F(x) \right]_1^2 < \left[F(x) \right]_2^3 \Leftrightarrow F(2) - F(1) < F(3) - F(2)$$

Από ΘΜΤ για την F στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$ προκύπτει ότι

- υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \Rightarrow f(\xi_1) = F(2) - F(1)$

- υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_2) = \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} \Rightarrow f(\xi_2) = F(3) - F(2)$

άρα $f(\xi_1) < f(\xi_2) \Rightarrow \xi_1 < \xi_2$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

$$\int_1^2 f(x)dx < \int_2^3 f(x)dx$$

.

β' τρόπος

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$2 \int_1^2 f(x)dx + \int_3^1 f(x)dx < 0 \Rightarrow 2 \int_1^2 f(x)dx - \int_1^3 f(x)dx < 0$$

Η σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} 2[F(2) - F(1)] - [F(3) - F(1)] < 0 &\Leftrightarrow 2F(2) - 2F(1) - F(3) + F(1) < 0 \\ &\Leftrightarrow F(2) - F(1) < F(3) - F(2) \end{aligned}$$

Από ΘΜΤ για την F στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[2, 3]$ προκύπτει ότι

- υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \Rightarrow F(2) - F(1) = f(\xi_1)$
- υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_2) = \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} \Rightarrow F(3) - F(2) = f(\xi_2)$

οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow F(2) - F(1) < F(3) - F(2)$$

vii) Είναι

$$3 \int_0^1 (f(x) + 2x \ln x) dx \cdot x^3 + \frac{2}{e^2 + 1} \int_1^e (f(x) - 2x^2) dx \cdot x^2 = -x - \kappa$$

- $I_1 = \int_0^1 (f(x) + 2x \ln x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$
- $I_2 = \int_1^e (f(x) - 2x^2) dx = -2 \int_1^e x \ln x dx = \left[(-x^2) \ln x + \frac{x^2}{2} \right]_1^e = -\frac{e^2 + 1}{2}$

άρα η αρχική εξίσωση γίνεται

$$3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{e^2 + 1} \cdot \left(-\frac{e^2 + 1}{2} \right) \cdot x^2 = -x - \kappa \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + x + \kappa = 0$$

Θέτω $h(x) = 2x^3 - x^2 + x + \kappa$ στο διάστημα $[0, 1]$

- η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική

- $h(0) = \kappa < 0$
- $h(1) = 2 - 1 + 1 + \kappa = 2 + \kappa > 0$

άρα από Θεώρημα Bolzano η $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0, 1)$

Είναι $h'(x) = 6x^2 - 2x + 1$ ($\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$) άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική