Άσκηση 73

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) + \alpha x^2 - 3$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x} = 3$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

ii) α΄) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β΄) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0 < x_2$.

Δίνεται ότι $\ln 2 \simeq 0,7$

iii) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$, όπου $g(x) = f(\ln x)$, $x \in \left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$. Να αποδείξετε ότι $f(1)(1-e) < E < 2(e-1)$.

iv) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(\displaystyle\int_0^x \left(t^2 - \text{ημ}^2 t\right) dt\right) + 2 \leq 0$ στο $(-1, +\infty)$.

v) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\text{συν}x \cdot f(\text{ημ}x) - \text{ημ}x \cdot f(\text{συν}x)}{\text{ημ}x - \text{συν}x} > 2$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Λύση

i) Είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1) + \alpha x^2 - 3$, $x > -1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} + 2\alpha x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(f'(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \left(e^x + \frac{1}{(x+1)^2} + 2\alpha \right) = 2 + 2\alpha = 3 \Rightarrow 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

ii) α΄) Για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} + 1 > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$

β΄) Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$

- Για $-1 < x < 0 \overset{f' \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$
- Για $x > 0 \overset{f' \text{ γν. αυξ}}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$

x	-1		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ΟΕ
$f(0) = -2$

- $0 \in f((-1, 0]) = [f(0), \lim_{x\to -1^+} f(x)) = [-2, +\infty)$ και f γνησίως φθίνουσα, άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $x_1 \in (-1, 0)$
- $0 \in f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x\to +\infty} f(x)) = [-2, +\infty)$ και f γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_2 \in (0, +\infty)$

iii) Είναι

$$1 \le x \le e \Leftrightarrow 0 \le \ln x \le 1 \overset{f \text{ γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(1) \Leftrightarrow$$
$$-2 \le f(\ln x) \le (e-3) + \left(\frac{1}{2} - \ln 2\right) < 0 \Leftrightarrow -2 \le g(x) \le f(1) < 0$$

άρα

$$E = \int_1^e |g(x)| dx = -\int_1^e g(x) dx$$

οπότε

$$-2 \le g(x) \le f(1) \Leftrightarrow -f(1) \le -g(x) \le 2$$

και το = μόνο για $x = e$ και $x = 1$ αντίστοιχα, άρα

$$\int_1^e -f(1) dx < -\int_1^e g(x) dx < \int_1^e 2 dx \Rightarrow$$

$$-f(1)(e-1) < E < 2(e-1) \Rightarrow$$
$$f(1)(1-e) < E < 2(e-1)$$

iv) Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το -2 άρα $f(x) \geq -2$ για κάθε $x > -1$ και το = μόνο για $x=0$, οπότε

$$f\left(\int_0^x (t^2 - \text{ημ}^2 t)\, dt\right) \geq -2 \Leftrightarrow f\left(\int_0^x (t^2 - \text{ημ}^2 t)\, dt\right) + 2 \geq 0$$

με το = να ισχύει μόνο όταν $\int_0^x (t^2 - \text{ημ}^2 t)\, dt = 0$

άρα η ανίσωση

$$f\left(\int_0^x (t^2 - \text{ημ}^2 t)\, dt\right) + 2 \leq 0$$

μπορεί να αληθεύει μόνο σαν ισότητα, δηλαδή όταν $\int\limits_0^x \left(t^2 - \text{ημ}^2 t\right) dt = 0$

Είναι $|\text{ημ}t| \leq |t| \Leftrightarrow t^2 - \text{ημ}^2 t \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και το = για $t=0$ οπότε

- αν $x > 0$ τότε $\int\limits_0^x \left(t^2 - \text{ημ}^2 t\right) dt > 0$ απορρίπτεται
- αν $-1 < x < 0$ τότε $\int\limits_0^x \left(t^2 - \text{ημ}^2 t\right) dt < 0$ απορρίπτεται
- αν $x = 0$ τότε $\int\limits_0^0 \left(t^2 - \text{ημ}^2 t\right) dt = 0$

Επομένως $x=0$ μοναδική λύση

v) Στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $0 < \text{ημ}x < \text{συν}x \Leftrightarrow \text{ημ}x - \text{συν}x < 0$ άρα

$$\frac{\text{συν}x \cdot f(\text{ημ}x) - \text{ημ}x \cdot f(\text{συν}x)}{\text{ημ}x - \text{συν}x} > 2$$

$$\text{συν}x \cdot f(\text{ημ}x) - \text{ημ}x \cdot f(\text{συν}x) < 2(\text{ημ}x - \text{συν}x)$$

$$\text{συν}x \cdot f(\text{ημ}x) + 2\text{συν}x < \text{ημ}x \cdot f(\text{συν}x) + 2\text{ημ}x$$

$$\text{συν}x \cdot (f(\text{ημ}x) + 2) < \text{ημ}x \cdot (f(\text{συν}x) + 2)$$
$$\frac{f(\text{ημ}x) + 2}{\text{ημ}x} < \frac{f(\text{συν}x) + 2}{\text{συν}x}$$

Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x) + 2}{x}$ για $x > 0$ άρα $g'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot x - (f(x) + 2)}{x^2}$

Θέτω $w(x) = f'(x) \cdot x - (f(x) + 2)$, $x \geq 0$

$w'(x) = f''(x) \cdot x + f'(x) - f'(x) = x \cdot f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

Συνεπώς η w είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ (αφού είναι συνεχής)

άρα για $x>0 \overset{\text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} w(x)>w(0) \Leftrightarrow w(x)>0$

οπότε $g'(x)>0$ για κάθε $x>0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

άρα η ανίσωση γίνεται

$$g(\text{ημ}x)<g(\text{συν}x) \Leftrightarrow \text{ημ}x<\text{συν}x$$

που ισχύει για κάθε $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$