Άσκηση 74

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4e^{x-\lambda}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η C_f έχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = 2x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη (ε) που την διαπερνά στο σημείο καμπής.

ii) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$ και να βρεθεί η εξίσωση της (ε).

iii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της $C_{f'}$ στο $-\infty$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\ln(-x)(f'(x) - 4x)}$.

v) Να αποδείξετε ότι $f'(e) < \int_0^1 f'(e^x)dx < 4(e-1)$.

Λύση

i) Είναι $f(x) = 2x^2 - 4e^{x-\lambda}$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 4x - 4e^{x-\lambda} \text{ και } f''(x) = 4 - 4e^{x-\lambda}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4e^{x-\lambda} = 0 \Leftrightarrow 4 = 4e^{x-\lambda} \Leftrightarrow x = \lambda$$

x	$-\infty$	λ	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	$\smile$		$\frown$
		ΣΚ $(\lambda, f(\lambda))$	

Το σημείο καμπής είναι το $A(\lambda, f(\lambda))$. Θέτω $x = \lambda \in \mathbb{R}$ και $y = f(\lambda) = 2\lambda^2 - 4$ οπότε $y = 2x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Αφού η (ε) διαπερνά τη C_f στο σημείο καμπής, το σημείο επαφής είναι το $A(\lambda, f(\lambda))$

και επειδή η εφαπτομένη είναι οριζόντια ισχύει $f'(\lambda) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

για $\lambda = 1$ η εξίσωση της (ε) είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - (-2) = 0(x-1) \Leftrightarrow y = -2$$

iii) Είναι $f'(x) = 4x - 4e^{x-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x - 4e^{x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(4 - \frac{4e^{x-1}}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(4 - 4e^{x-1} \cdot \frac{1}{x}\right) = 4 - 0 = 4 = \lambda'$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} [f'(x) - \lambda' x] = \lim_{x\to-\infty} (4x - 4e^{x-1} - 4x) = \lim_{x\to-\infty} (-4e^{x-1}) = 0 = \beta$$

άρα η $y = 4x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_{f'}$ στο $-\infty$

iv) Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\ln(-x)(f'(x) - 4x)} == \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x}{\ln(-x)} \cdot \frac{1}{f'(x) - 4x}\right] = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\ln(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{-x}(-1)} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

και

$$f'(x) < 4x \Leftrightarrow 4x - 4e^{x-1} < 4x \Leftrightarrow -4e^{x-1} < 0 \quad \text{που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f'(x) - 4x} = -\infty$

v) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) < 4x \Rightarrow f'(e^x) < 4e^x$$

οπότε

$$\int_0^1 f'(e^x)\,dx < \int_0^1 4e^x\,dx = \Big[4e^x\Big]_0^1 = 4e - 4 = 4(e-1)$$

Είναι $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e$

η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, e]$

$$1 \leq e^x \leq e \Leftrightarrow f'(1) \geq f'(e^x) \geq f'(e)$$

$$f'(e) \leq f'(e^x) \leq 0$$

και το = μόνο για $x = e$ και $x = 1$ αντίστοιχα, άρα

$$\int_0^1 f'(e)\,dx < \int_0^1 f'(e^x)\,dx \Rightarrow f'(e) < \int_0^1 f'(e^x)\,dx$$

οπότε

$$f'(e) < \int_0^1 f'(e^x)\,dx < 4(e-1)$$