

Άσκηση 75

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln(\alpha x)$, $x > 0$, $\alpha > 0$. Η C_f έχει στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{\sqrt{e}}$ οριζόντια εφαπτομένη.

i) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Έστω $\alpha = 1$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $g = f \circ h$.

iv) α') Να βρείτε το κοινό σημείο M των C_f , C_g . Στη συνέχεια, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f , C_g στο M είναι κάθετες μεταξύ τους και να προσδιορίσετε τις εξισώσεις τους.

β') Να δείξετε ότι $f(x) \leq -x + 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $g(x) \leq x - 1$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

v) Αν E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = 1$, να αποδείξετε ότι $E_1 = \frac{1}{9} - \frac{4}{9e^3}$.

vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $E_1 = E_2$, όπου E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = x_0$. Δίνεται $e^3 \simeq 20$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με $f'(x) = 2x \ln(\alpha x) + x$

Η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$, άρα

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0 \Rightarrow 2 \frac{1}{\sqrt{e}} \ln\left(\alpha \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{1}{\sqrt{e}} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln\left(\frac{\alpha}{\sqrt{e}}\right) + 1 = 0$$

$$2 \ln \alpha - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$

άρα $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ και $f''(x) = 2 \ln x + 3$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$	
f'		-	0	+
f	0		$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

$$\text{OE} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

x	0	$e^{-3/2}$	$+\infty$	
f''		-	0	+
f			↪	↪

$$\text{ΣΚ} \\ \left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2e^3}\right)$$

iii) Είναι

$$D_g = \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} = \{x \neq 0 \mid \frac{1}{x} > 0\} = \{x \neq 0 \mid x > 0\} = (0, +\infty)$$

και

$$g(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(-\ln x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

iv) α) Για να βρω τα κοινά σημεία των C_f και C_g λύνω

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 \ln x = -\frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow \ln x(x^4 + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

άρα το κοινό σημείο είναι το $M(1, f(1)) = M(1, 0)$

$$f'(1) = 1 \text{ και } g'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}, \text{ άρα } g'(1) = -1$$

Επειδή $f'(1) \cdot g'(1) = 1 \cdot (-1) = -1$, οι εφαπτόμενες είναι κάθετες

$$(\varepsilon_1) : y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 \text{ και } (\varepsilon_2) : y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

β') Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi(x) = f(x) + x - 1$ για $x \in (0, 1]$. Είναι $\phi'(x) = f'(x) + 1$ και $\phi''(x) = f''(x)$.

- Στο διάστημα $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ η ϕ' είναι γνησίως φθίνουσα
- Στο διάστημα $\left[e^{-\frac{3}{2}}, 1\right]$ η ϕ' είναι γνησίως αύξουσα

Η ϕ' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = e^{-\frac{3}{2}}$ το

$$\phi'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = 1 - 2e^{-\frac{3}{2}} > 0$$

άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ οπότε

$$x \leq 1 \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(1) \Rightarrow f(x) + x - 1 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq -x + 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi(x) = g(x) - x + 1$ για $x \in [1, +\infty)$

$$\text{Είναι } \psi'(x) = g'(x) - 1 = \frac{2 \ln x - 1}{x^3} - 1 = \frac{2 \ln x - 1 - x^3}{x^3}$$

$$\text{Θέτω } h(x) = 2 \ln x - 1 - x^3, \text{ τότε } h'(x) = \frac{2}{x} - 3x^2 = \frac{2 - 3x^3}{x} < 0 \text{ για κάθε } x \geq 1$$

άρα h γνησίως φθίνουσα οπότε για $x \geq 1$ ισχύει $2 \ln x - 1 - x^3 \leq -2 < 0$

Συνεπώς $\psi'(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$, άρα η ψ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε

$$x \geq 1 \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(1) \Rightarrow g(x) - x + 1 \leq 0 \Rightarrow g(x) \leq x - 1$$

v) Είναι για $x \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1) = 0$ για $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, οπότε

$$E_1 = \int_{\frac{1}{e}}^1 |f(x)| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 -x^2 \ln x dx = -\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3e^3} + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^2}{3} dx =$$

$$-\frac{1}{3e^3} + \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e = -\frac{1}{3e^3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9e^3} = \frac{1}{9} - \frac{4}{9e^3}$$

vi) Για $x \in [1, e]$ είναι $g(x) \leq 0$ αφού $\ln x \geq 0$, οπότε

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_1^{x_0} |g(x)| dx = \int_1^{x_0} \frac{\ln x}{x^2} dx = - \int_1^{x_0} \left(\frac{1}{x} \right)' \ln x dx = \\ &= - \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^{x_0} + \int_1^{x_0} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x_0}{x_0} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} + 1 = \frac{x_0 - \ln x_0 - 1}{x_0} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $E_2(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών

- για $x = 1$: $E_2(1) = 0$
- για $x = e$: $E_2(e) = \frac{e - \ln e - 1}{e} = \frac{e - 2}{e} = 1 - \frac{2}{e}$

Επειδή $e^3 \simeq 20$ είναι $E_1 = \frac{1}{9} - \frac{4}{9e^3} \simeq \frac{1}{9} - \frac{4}{9 \cdot 20} = \frac{4}{45}$

άρα $0 < E_1 < 1 - \frac{2}{e}$ οπότε από ΘΕΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $E_2(x_0) = E_1$