Άσκηση 76

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x \text{συν}x & , \ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \\ \sqrt{1+\text{ημ}2x} & , \ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{ημ}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}{(e^{-x}-1)(f(x)-x-1)}$.

v) Σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x > 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $\sqrt{2}\, cm/\text{sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OBM, όπου B η προβολή του M στον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από τη θέση μεγίστου της f.

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, την $y = x + 1$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

i) Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\text{συν}x-1}{x}\overset{DLH}{=}\lim_{x\to 0^-}(e^x\text{συν}x-e^x\text{ημ}x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\text{ημ}2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{ημ}2x}{x(\sqrt{1+\text{ημ}2x}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

γιατί

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{ημ}2x}{x}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\text{ημ}u}{\frac{u}{2}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{2\text{ημ}u}{u}=2\lim_{u\to 0^+}\frac{\text{ημ}u}{u}=2\cdot 1=2$$

άρα $f'(0)=1$ και η εφαπτομένη είναι $y-1=1(x-0)\Rightarrow y=x+1$

ii) Είναι $f'(x)=\begin{cases} e^x(\text{συν}x-\text{ημ}x) & ,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right] \\ \dfrac{\text{συν}2x}{\sqrt{1+\text{ημ}2x}} & ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		+		+	0	−	
f	0	↗		↗	$\sqrt{2}$	↘	1
	ΟΕ				ΟΜ		ΤΜ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

Το σύνολο τιμών είναι $f(A)=[0,\sqrt{2}]$

iii) Είναι $f''(x)=\begin{cases} -2e^x\text{ημ}x & ,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) \\ \dfrac{-2\text{ημ}2x(1+\text{ημ}2x)-\text{συν}^2 2x}{(1+\text{ημ}2x)\sqrt{1+\text{ημ}2x}} & ,\ x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''		+		−	
f		∪		∩	
			ΣΚ $(0,1)$		

iv) Είναι

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{\etaμ\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(e^{-x}-1)(f(x)-x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sigmaυνx}{(e^{-x}-1)(f(x)-x-1)}$$

- Για $x<0$ είναι $-x>0 \Rightarrow e^{-x}>1 \Rightarrow e^{-x}-1>0$
- Για $x>0$ είναι $-x<0 \Rightarrow e^{-x}<1 \Rightarrow e^{-x}-1<0$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$ είναι η $y=x+1$

- Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $f(x)\geq x+1 \Rightarrow f(x)-x-1\geq 0$ (το $=$ μόνο για $x=0$).
- Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ η f είναι κοίλη άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη $f(x)\leq x+1 \Rightarrow f(x)-x-1\leq 0$ (το $=$ μόνο για $x=0$).

άρα

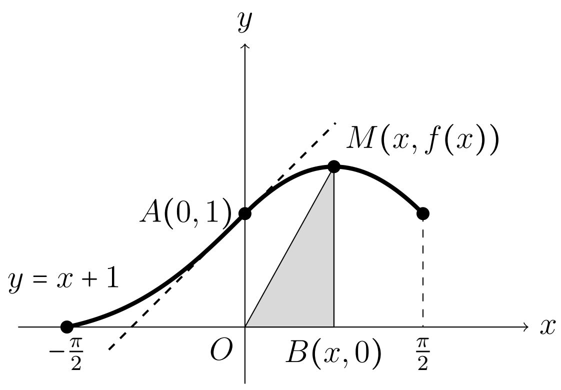
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sigmaυνx}{\underbrace{(e^{-x}-1)}_{>0}\underbrace{(f(x)-x-1)}_{>0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sigmaυνx}{\underbrace{(e^{-x}-1)}_{<0}\underbrace{(f(x)-x-1)}_{<0}} = -\infty$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\etaμ\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(e^{-x}-1)(f(x)-x-1)} = -\infty$$

v) Είναι



$$E = \frac{x\cdot f(x)}{2} \Rightarrow E(t) = \frac{x(t)\cdot f(x(t))}{2}$$

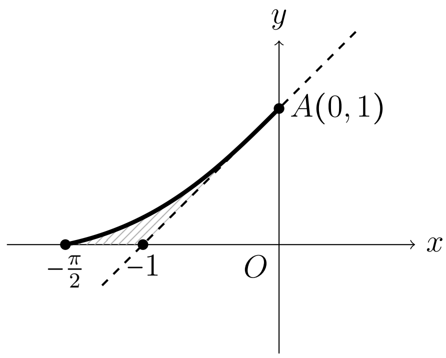
$$E'(t) = \frac{1}{2}\left[x'(t)\cdot f(x(t)) + x(t)\cdot f'(x(t))\cdot x'(t)\right]$$

για $t=t_0$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\cdot 0\cdot\sqrt{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1\ cm^2/sec$$

vi) Έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx - E_{\text{τρίγ}}$$



Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $(-1,0),(0,0),(0,1)$ είναι $E_{\text{τρίγ}} = \dfrac{1\cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Θέτω

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \text{συν}x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (e^x)'\text{συν}x\,dx = \Big[e^x\text{συν}x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \text{ημ}x\,dx =$$

$$1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \text{ημ}x\,dx = 1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (e^x)'\text{ημ}x\,dx = 1 + \Big[e^x\text{ημ}x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \text{συν}x\,dx =$$

$$1 + e^{-\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^x \text{συν}x\,dx = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} - I$$

Επομένως έχουμε

$$I = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} - I \Rightarrow 2I = 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι

$$E(\Omega) = \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$