Άσκηση 77

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + \alpha x)e^{\beta x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία x_1, x_2.

ii) Αν ισχύει $x_1 x_2 = -2$ και $x_1 + x_2 = 0$ να βρεθούν τα α, β.

Έστω $\alpha = 2$, $\beta = -1$

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα, τις θέσεις των σημείων καμπής και να δείξετε ότι είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x = 1$.

v) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

vi) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} F(x)dx = -\frac{1}{3}F(1) + \frac{e-2}{e}$, όπου F μία αρχική της f με $F(0) = 0$.

Λύση

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα κρίσιμα είναι τα σημεία όπου $f'(x) = 0$. Είναι

$$f'(x) = (2x + \alpha)e^{\beta x} + (x^2 + \alpha x)\beta e^{\beta x} = e^{\beta x}\left[\beta x^2 + (\alpha\beta + 2)x + \alpha\right]$$

$$\Delta = (\alpha\beta + 2)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta + 4 - 4\alpha\beta = \alpha^2\beta^2 + 4 > 0$$

άρα η $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες x_1, x_2, άρα η f έχει δύο κρίσιμα σημεία

ii) Είναι

- $x_1 + x_2 = -\dfrac{\alpha\beta + 2}{\beta} = 0 \Rightarrow \alpha\beta + 2 = 0 \Rightarrow \alpha\beta = -2$
- $x_1 x_2 = \dfrac{\alpha}{\beta} = -2 \Rightarrow \alpha = -2\beta$

οπότε $(-2\beta)\cdot\beta = -2 \Rightarrow \beta^2 = 1$.

- Αν $\beta = 1$ τότε $\alpha = -2$.
- Αν $\beta = -1$ τότε $\alpha = 2$.

iii) Είναι $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ και $f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0
			ΟΕ $(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$		ΟΜ $(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$		

Σύνολο τιμών: $f(\mathbb{R}) = [(2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, +\infty)$.

iv) $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	
			ΣΚ		ΣΚ		

Είναι $\dfrac{x_3+x_4}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2} = 1$, άρα οι θέσεις των σημείων καμπής είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $x = 1$

v) Στο $[0,1]$ είναι $x^2+2x \geq 0$, άρα $f(x) \geq 0$

$$E = \int_0^1 (x^2+2x)e^{-x}dx = \int_0^1 (x^2+2x)(-e^{-x})'dx = \Big[-(x^2+2x)e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 (2x+2)e^{-x}dx =$$

$$-3e^{-1} + \int_0^1 (2x+2)(-e^{-x})'dx = -3e^{-1} + \Big[-(2x+2)e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx =$$

$$-3e^{-1} - 4e^{-1} + 2 + \Big[-2e^{-x}\Big]_0^1 = -7e^{-1} + 2 - 2e^{-1} + 2 = 4 - 9e^{-1} = \frac{4e-9}{e}$$

vi) Έχουμε

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2}F(x)dx = \int_0^1 \Big(-\frac{1}{x+2}\Big)'F(x)dx = \Big[-\frac{F(x)}{x+2}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{F'(x)}{x+2}dx =$$

$$-\frac{1}{3}F(1) + \int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{3}F(1) + \int_0^1 x(-e^{-x})'dx =$$

$$-\frac{1}{3}F(1) + \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{1}{3}F(1) - e^{-1} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 =$$

$$-\frac{1}{3}F(1) - 2e^{-1} + 1 = -\frac{1}{3}F(1) + \frac{e-2}{e}$$