Άσκηση 78

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(e^x-1)f(x)-x=\text{ημ}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Έστω $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{ημ}x+x}{e^x-1} & ,\ x\neq 0\\ 2 & ,\ x=0\end{cases}$.

ii) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,2)$ και να βρεθεί η εξίσωσή της.

iii) Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να δείξετε ότι $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

v) α΄) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{f(-\text{συν}x)}{f(\text{συν}x)}dx>\frac{\pi+3}{6}$.

β΄) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x+\text{ημ}x}{f(x)+f(-x)}dx$.

vi) Να αποδείξετε ότι $F(x)+F(-x)\leq 2F(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου F αρχική της f.

Λύση

i) Για $x \neq 0$ έχουμε

$$(e^x - 1)f(x) = \eta\mu x + x \Rightarrow f(x) = \frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x + 1}{e^x} = 2$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x + x}{e^x - 1} & , \ x \neq 0 \\ 2 & , \ x = 0 \end{cases}$

ii) Είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\eta\mu x + x}{e^x - 1} - 2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x + x - 2e^x + 2}{x(e^x - 1)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x + x - 2e^x + 2}{xe^x - x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x + 1 - 2e^x}{e^x + xe^x - 1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x - 2e^x}{e^x + e^x + xe^x} = -1$$

άρα $f'(0) = -1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 2 = -1\cdot x \iff y = -x + 2$$

iii) Για $x > 0$ είναι $e^x - 1 > 0$ και $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Leftrightarrow \eta\mu x + x > 0$ άρα $f(x) > 0$

Για $x < 0$ είναι $e^x - 1 < 0$ και $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Leftrightarrow \eta\mu x + x < 0$ άρα $f(x) > 0$

και $f(0) = 2 > 0$ άρα ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x - 1}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x} + 1\right) = 0$$

διότι

- $-\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{\eta\mu x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ με $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ οπότε από ΚΠ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$ και
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right) \overset{DLH}{=} \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x - 1}(\eta\mu x + x) = +\infty$$

- $\lim_{x\to-\infty}(\eta\mu x + x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\dfrac{\eta\mu x}{x} + 1\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty$ και
- $\lim_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ η f παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $(0,+\infty)$ οπότε το σύνολο τιμών είναι $f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$

v) α΄) Είναι

$$f(-x) = \frac{\text{ημ}(-x) - x}{e^{-x} - 1} = \frac{-(\text{ημ}x + x)}{\dfrac{1 - e^x}{e^x}} = e^x \frac{\text{ημ}x + x}{e^x - 1} = e^x f(x)$$

άρα

$$\frac{f(-\text{συν}x)}{f(\text{συν}x)} = e^{\text{συν}x}$$

Είναι $e^x \geq x+1$ και το = για $x = 0$, άρα $e^{\text{συν}x} \geq \text{συν}x + 1$ και το = μόνο για $\text{συν}x = 0$

Επομένως

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(-\text{συν}x)}{f(\text{συν}x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\text{συν}x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\text{συν}x + 1) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\text{συν}x + 1) dx = \Big[\text{ημ}x + x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}$$

Συνεπώς

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(-\text{συν}x)}{f(\text{συν}x)} dx > \frac{\pi + 3}{6}$$

β΄) Είναι $x + \text{ημ}x = (e^x - 1)f(x)$ και $f(-x) = e^x f(x)$

άρα ο παρονομαστής γίνεται $f(x) + f(-x) = f(x) + e^x f(x) = f(x)(1 + e^x)$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x + \text{ημ}x}{f(x) + f(-x)} dx = \int_{-1}^{1} \frac{(e^x - 1)f(x)}{(e^x + 1)f(x)} dx = \int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx + \int_{0}^{1} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ θέτουμε $u = -x$, οπότε $dx = -du$

- Για $x = -1 \Rightarrow u = 1$
- Για $x = 0 \Rightarrow u = 0$

Άρα

$$I_1 = \int_{1}^{0} \frac{e^{-u} - 1}{e^{-u} + 1} (-du) = \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{e^u} - 1}{\frac{1}{e^u} + 1} du = \int_{0}^{1} \frac{\frac{1-e^u}{e^u}}{\frac{1+e^u}{e^u}} du = \int_{0}^{1} \frac{1 - e^u}{1 + e^u} du$$

οπότε

$$I = \int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} + \frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{1-e^x+e^x-1}{1+e^x}dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

vi) Θέτω $g(x) = F(x) + F(-x)$, $x \in \mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f(x) - f(-x) = f(x) - e^x f(x) = f(x)(1 - e^x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	
			ΟΜ $2F(0)$		

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x) \le g(0) \Rightarrow F(x) + F(-x) \le 2F(0)$$