Άσκηση 79

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \text{ημ}x$, $x \in [0, 2\pi]$.

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = f \circ g$.

ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της φ.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $e^{\text{ημ}x} = 1 - \text{ημ}x$ στο $[0, 2\pi]$.

Έστω Φ αρχική της φ

iv) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της Φ και να δείξετε ότι $\Phi(x) \leq \Phi(\pi)$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

v) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε $\int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx = \pi \cdot \Phi(\xi)$.

vi) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\Phi(x) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + \text{ημ}\dfrac{2026}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$.

Λύση

i) Είναι

$$D_\varphi = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0,2\pi] \mid \etaμx \in \mathbb{R}\} = [0,2\pi]$$

και

$$\varphi(x) = f(g(x)) = e^{\etaμx} + \etaμx - 1$$

ii) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2\pi)$ με

$$\varphi'(x) = (e^{\etaμx} + \etaμx - 1)' = συνx \cdot e^{\etaμx} + συνx = συνx(e^{\etaμx} + 1)$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx = 0 \overset{x \in [0,2\pi]}{\Rightarrow} x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
φ'		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\frac{1}{e}-2$	$\nearrow$	0
	ΤΕ		ΟΜ		ΟΕ		ΤΜ

Επομένως $\varphi(A) = \left[\frac{1}{e} - 2, e\right]$

iii) Είναι

$$e^{\etaμx} + \etaμx - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$

Παρατηρώ ότι

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = 0$$

και φ γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες, τις $x = 0, x = \pi, x = 2\pi$

iv) Αφού Φ αρχική της φ, τότε Φ παραγωγίσιμη και ισχύει $\Phi'(x) = \varphi(x)$, άρα κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία όπου $\Phi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \overset{x \in (0,2\pi)}{\Rightarrow} x = \pi$

x	0		π		2π
Φ'	0	$+$	0	$-$	0
Φ		$\nearrow$	$\Phi(\pi)$	$\searrow$	
	ΤΕ		ΟΜ		ΤΕ

Επειδή η Φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο π, ισχύει $\Phi(x) \leq \Phi(\pi)$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

v) Στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$ η Φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα (αφού $\Phi'(x) = \varphi(x) \leq 0$ για $x \in [\pi, 2\pi]$). Για κάθε $x \in [\pi, 2\pi]$ έχουμε

$$\pi \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow \Phi(2\pi) \leq \Phi(x) \leq \Phi(\pi)$$

και το = μόνο για $x = 2\pi$ και $x = \pi$ αντίστοιχα, άρα

$$\int_{\pi}^{2\pi} \Phi(2\pi)dx < \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx < \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(\pi)dx$$

$$(2\pi - \pi)\Phi(2\pi) < \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx < (2\pi - \pi)\Phi(\pi)$$

$$\Phi(2\pi) < \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx < \Phi(\pi)$$

Επειδή $\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx \in (\Phi(2\pi), \Phi(\pi))$ από ΘΕΤ για την Φ στο $[\pi, 2\pi]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx \Leftrightarrow \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(x)dx = \pi\Phi(\xi)$$

και Φ γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$, άρα το ξ είναι μοναδικό

vi) Είναι $\Phi''(x) = \varphi'(x) = \text{συν}x(e^{\text{ημ}x} + 1)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Φ''		$+$	0	$-$	0	$+$	
Φ		$\smile$		$\frown$		$\smile$	
			ΣΚ		ΣΚ		

Η εφαπτομένη της C_Φ στο $A\left(\frac{\pi}{2}, \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ είναι η

$$y - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + e\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Η Φ είναι κοίλη στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, η C_Φ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη, άρα

$$\Phi(x) \leq \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + e\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \Phi(x) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 0$$

και το = μόνο για $x = \frac{\pi}{2}$ άρα κοντά στο $\frac{\pi}{2}^{+}$ έχουμε

$$\Phi(x) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

άρα

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\Phi(x)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)-e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\Phi(x)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)-e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right] =$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

και

$$-1 \leq \text{ημ}\frac{2026}{x-\frac{\pi}{2}} \leq 1$$

άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\Phi(x)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)-e\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} + \text{ημ}\frac{2026}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = +\infty$$