Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x\ln x^3+1 & ,\ x>0 \\ \alpha & ,\ x=0 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha=1$.

ii) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0,1]$ και στη συνέχεια να βρείτε τα $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Έστω $A\left(0,f(0)\right)$ και $B\left(e,f(e)\right)$

iv) α΄) Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B έχει εξίσωση $y=3x+1$.

β΄) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 3x+1$ για κάθε $x\in[0,e]$.

v) α΄) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από την C_f, την ευθεία AB και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=e$, όπου$\lambda\in(0,e)$.

β΄) Να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to 0}E(\lambda)$.

Λύση

i) Για $x > 0$ είναι $f(x) = x\ln x^3 + 1 = 3x\ln x + 1$ και $f'(x) = 3(\ln x + 1)$

Αφού η f είναι συνεχής στο 0 έχουμε $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x\ln x + 1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

ii) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$

παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και

$f(0) = f(1) = 1$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $[0,1]$

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0 \Rightarrow 3(\ln\xi + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln\xi = -1 \Leftrightarrow \xi = \dfrac{1}{e}$

iii) Για $x > 0$ είναι $f'(x) = 3(\ln x + 1)$ οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{3}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Τ.Μ.
$f(0) = 1$

Ο.Ε.
$f\left(\dfrac{1}{e}\right) = 1 - \dfrac{3}{e}$

Άρα $f(A) = \left[1 - \dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

Για $x > 0$ έχουμε $f''(x) = \dfrac{3}{x} > 0$ Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και δεν έχει σημείο καμπής.

iv) α′) Είναι $A(0, f(0)) = (0,1)$ και $B(e, f(e)) = (e, 3e+1)$

$$\lambda_{AB} = \frac{(3e+1)-1}{e-0} = 3$$

$AB : y - 1 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 1$

β′) Θέτουμε $g(x) = 3x + 1 - f(x)$, $x \in [0,e]$

$g'(x) = 3 - 3(\ln x + 1) = -3\ln x$

x	0		1		e
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$$g(0) = 0 \qquad\qquad g(e) = 0$$

Άρα $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, e]$, επομένως $f(x) \leq 3x + 1$ για κάθε $x \in [0, e]$

v) α′)

$$E(\lambda) = \int_{\lambda}^{e} \left|3x + 1 - f(x)\right| dx = \int_{\lambda}^{e} 3x + 1 - f(x) dx = 3\int_{\lambda}^{e} (x - x\ln x)\, dx =$$

$$\int_{\lambda}^{e} 3x\, dx - \int_{\lambda}^{e} 3x \ln x\, dx = 3\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\lambda}^{e} - \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_{\lambda}^{e}\right)$$

$$= 3\left(\frac{e^2}{4} - \frac{3\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2}\ln\lambda\right) = \frac{3e^2}{4} - \frac{9\lambda^2}{4} + \frac{3\lambda^2}{2}\ln\lambda$$

β′)

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{3e^2}{4} - \frac{9\lambda^2}{4} + \frac{3\lambda^2}{2}\ln\lambda\right) = \frac{3e^2}{4}$$

αφού

$$\lim_{\lambda\to 0^+} = \lambda^2 \ln\lambda = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} \overset{DLH}{=} \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda\to 0^+} -\frac{\lambda^2}{2} = 0$$