Άσκηση 80

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^{-x}-x(\ln x-1) & ,\ x>0 \\ \kappa+\lambda & ,\ x=0 \end{cases}$,

$\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, όπου $\kappa=\displaystyle\int_{-e}^{-1}\ln(-x)dx$.

i) Να δείξετε ότι $\kappa=1$, $\lambda=0$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,+\infty)$, όπου $x_0\in(0,1)$.

Έστω F αρχική της f στο $[0,+\infty)$

iii) Να αποδείξετε ότι $F(x)\le F(\rho)$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης $\ln x-1=\dfrac{1}{xe^x}$, $x>0$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{x_0}^{\rho}F''(x)dx<x_0^2-x_0-1$.

v) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_1^2 F(x)dx<f(x_0)\frac{3-2x_0}{2}+F(x_0)$.

Λύση

i) Είναι

$$\kappa = \int_{-e}^{-1} \ln(-x)dx \overset{u=-x}{=} \int_{1}^{e} \ln u \, du = \Big[u\ln u - u\Big]_1^e = e - e - (-1) = 1$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(e^{-x} - x\ln x + x) = \kappa + \lambda \Rightarrow 1 - 0 + 0 = 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$$

.

ii) Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -e^{-x} - (\ln x - 1) - x \cdot \frac{1}{x} = -e^{-x} - \ln x$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$f''(x) = (-e^{-x} - \ln x)' = e^{-x} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{-x} - 1}{x}$$

Θέτω $g(x) = xe^{-x} - 1$, $x > 0$ τότε $g'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$

x	0		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$-1 \nearrow$	ΟΜ $\frac{1-e}{e}$	$\searrow -1$	

Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$ το $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ άρα ισχύει $g(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως $f''(x) = \frac{g(x)}{x} < 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και η f είναι κοίλη

Είναι $f'((0,1)) = (\lim_{x\to 1^-} f'(x), \lim_{x\to 0^+} f'(x)) = (-e^{-1}, +\infty)$

Το $0 \in f'((0,1))$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα x_0 μοναδικό

- Για $0 < x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$

- Για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$

x	0		x_0		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 1	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$
	TE		OM		

iii) Η ρίζα ρ της εξίσωσης $\ln x - 1 = \dfrac{1}{xe^x}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\ln\rho - 1 = \frac{1}{\rho e^{\rho}} \Leftrightarrow e^{-\rho} = \rho(\ln\rho - 1) \Leftrightarrow e^{-\rho} - \rho(\ln\rho - 1) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = 0$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x_0]$ με $f(0) = 1$, άρα $f(x) > 0$ στο $[0, x_0]$ Στο $[x_0, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα με $f(x_0) > 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ Άρα υπάρχει μοναδικό $\rho \in (x_0, +\infty)$ ώστε $f(x_0) = 0$

- Για $0 \le x \le x_0 \implies f(x) > 0 \implies F'(x) > 0$
- Για $x_0 < x < \rho \implies f(x) > f(\rho) = 0 \implies F'(x) > 0$
- Για $x > \rho \implies f(x) < f(\rho) = 0 \implies F'(x) < 0$

x	0		ρ		$+\infty$
F'	‖	$+$	0	$-$	
F	‖	$\nearrow$	$F(\rho)$	$\searrow$	
	TE		OM		

Συνεπώς η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο ρ οπότε $F(x) \le F(\rho)$ για κάθε $x \ge 0$.

iv) Επειδή F αρχική της f ισχύει $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x)$. Άρα

$$\int_{x_0}^{\rho} F''(x)dx = \int_{x_0}^{\rho} f'(x)dx = f(\rho) - f(x_0) = 0 - f(x_0) = -f(x_0)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$-f(x_0) < x_0^2 - x_0 - 1 \iff f(x_0) > 1 + x_0 - x_0^2$$

Είναι $f(x_0) = e^{-x_0} - x_0\ln x_0 + x_0$, $x_0 \in (0,1)$

- Από $e^x \ge x + 1$ για $x = -x_0$ έχουμε $e^{-x_0} > 1 - x_0$

- Από $\ln x \le x - 1$ για $x = x_0$ έχουμε $\ln x_0 < x_0 - 1 \iff -x_0 \ln x_0 > x_0 - x_0^2$

άρα

$$e^{-x_0} - x_0 \ln x_0 > (1 - x_0) + (x_0 - x_0^2) = 1 - x_0^2$$

$$e^{-x_0} - x_0 \ln x_0 + x_0 > 1 - x_0^2 + x_0 \implies f(x_0) > 1 + x_0 - x_0^2$$

v) Για κάθε $x > x_0$ ισχύει $f'(x) < 0$. Επειδή $F''(x) = f'(x) < 0$ για $x \in (x_0, +\infty)$, η F είναι κοίλη στο $[x_0, +\infty)$.

Η εφαπτομένη της C_F στο x_0 είναι

$$y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) \implies y = f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

Οπότε $F(x) \le f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$ για κάθε $x \ge x_0$ και το = μόνο για $x = x_0$

$$\int_1^2 F(x)dx < \int_1^2 [f(x_0)(x - x_0) + F(x_0)]dx$$

$$\int_1^2 F(x)dx < f(x_0)\Big[\frac{x^2}{2} - x_0 x\Big]_1^2 + F(x_0)\Big[x\Big]_1^2$$

$$\int_1^2 F(x)dx < f(x_0)\left(\frac{3}{2} - x_0\right) + F(x_0) = f(x_0)\frac{3 - 2x_0}{2} + F(x_0)$$