

## Άσκηση 81

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( f' \left( \frac{1}{x} \right) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + x - \frac{1}{6x} \right) = 0.$$

i ) Να αποδείξετε ότι το  $x_0 = 0$  είναι πιθανή θέση σημείου καμπής.

Επιπλέον, δίνεται  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$ , όπου  $\alpha < 0 < \beta$  και  $f'(\alpha) < f'(\beta)$ .

ii ) Να δείξετε ότι  $f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

iii ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (0, 1)$  ώστε  $\int_0^1 2(F(1) - F(x))dx = f(\xi)$ , όπου  $F$  αρχική της  $f$ .

## Λύση

i) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( f' \left( \frac{1}{x} \right) - x^2 \eta \mu \frac{1}{x} + x - \frac{1}{6x} \right) = 0$$

Θέτω  $u = \frac{1}{x}$  και το όριο γίνεται

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} \left( f'(u) - \frac{\eta \mu u}{u^2} + \frac{1}{u} - \frac{1}{6} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f'(u) - \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^2}}{u} = 0$$

Θέτω  $g(u) = \frac{f'(u) - \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^2}}{u}$  με  $\lim_{u \rightarrow 0^+} g(u) = 0$ , τότε

$$f'(u) = u \cdot g(u) + \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^2}$$

Η  $f'$  είναι συνεχής, άρα

$$f'(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} f'(u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( u \cdot g(u) + \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^2} \right) = 0$$

διότι

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \nu \eta u - 1 + \frac{u^2}{2}}{2u} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\eta \mu u + u}{2} = 0$$

επομένως

$$f''(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f'(u) - f'(0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( g(u) + \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^3} \right) = 0$$

αφού

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu u - u + \frac{u^3}{6}}{u^3} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sigma \nu \eta u - 1 + \frac{u^2}{2}}{3u^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\eta \mu u + u}{6u} \stackrel{DLH}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\sigma \nu \eta u + 1}{6} = 0$$

Άρα  $f''(0) = 0$ , οπότε το  $x_0 = 0$  είναι πιθανή θέση σημείου καμπής

ii) Η  $f'$  είναι συνεχής και  $f'(x) \neq 0$  για  $x \neq 0$ . Άρα η  $f'$  διατηρεί πρόσημο στα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ . Αφού  $f'(\alpha) < f'(\beta)$  και  $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$ , έχουμε  $f'(\alpha) < 0$  και  $f'(\beta) > 0$ . Συνεπώς  $f'(x) < 0$  για  $x < 0$  και  $f'(x) > 0$  για  $x > 0$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$	$-$	$0$	$+$
$f$	↘		↗

OE

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 0$ , επομένως  $f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

iii ) Είναι

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 2(F(1) - F(x))dx = \int_0^1 2F(1)dx - \int_0^1 2F(x)dx = \\
 &2F(1) - \int_0^1 (2x)'F(x)dx = 2F(1) - [2xF(x)]_0^1 + \int_0^1 2xf(x)dx = \\
 &2F(1) - 2F(1) + \int_0^1 2xf(x)dx = \int_0^1 2xf(x)dx
 \end{aligned}$$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$ , άρα για κάθε  $x \in [0, 1]$  ισχύει

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow 2xf(0) \leq 2xf(x) \leq 2xf(1)$$

και το = για  $x = 0$  και  $x = 1$  αντίστοιχα, οπότε

$$f(0) \int_0^1 2xdx < \int_0^1 2xf(x)dx < f(1) \int_0^1 2xdx$$

$$f(0)[x^2]_0^1 < I < f(1)[x^2]_0^1 \Rightarrow f(0) < I < f(1)$$

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  οπότε από το ΘΕΤ υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = I$  και  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1)$  άρα το  $\xi$  είναι μοναδικό.