

Άσκηση 82

Δίνεται συνάρτηση $f : \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^{f(x)} = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x > \frac{1}{e}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{\ln x + 1}$, $x > \frac{1}{e}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

iv) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow e^+} \left(e^{\frac{f(x)-\frac{x+e}{4}}{x-e}} \cdot \eta\mu \frac{1}{x-e} \right)$.

Εστω F μία αρχική της f με $F(e) = e$

v) Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

vi) Να δείξετε ότι $\int_1^e F(x) dx > \frac{-e^3 + 6e^2 - 5e}{4}$.

vii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_1^e (xf(x) + F(x)) dx - e^2}{x-1} + \frac{f(e^\alpha - a) - 1}{e-x} = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(1, e)$.

Λύση

i) Για κάθε $x > \frac{1}{e}$ έχουμε

$$x^{f(x)} = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow \ln x^{f(x)} = \ln(e^{x-f(x)}) \Leftrightarrow f(x) \ln x = x - f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) \ln x + f(x) = x \Leftrightarrow f(x)(\ln x + 1) = x$$

Είναι $x > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0$, οπότε $f(x) = \frac{x}{\ln x + 1}$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (\ln x + 1) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x + 1 - 1}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}$$

x	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
f'		-	+
f		$+\infty$	$+\infty$



OE

$$f(1) = 1$$

Είναι

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2} \right)' = \frac{\frac{1}{x}(\ln x + 1)^2 - \ln x \cdot 2(\ln x + 1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^4} =$$

$$\frac{\frac{1}{x}(\ln x + 1)[(\ln x + 1) - 2\ln x]}{(\ln x + 1)^4} = \frac{1 - \ln x}{x(\ln x + 1)^3}$$

x	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
f''		+	-
f			

ΣΚ

$$\left(e, \frac{e}{2} \right)$$

iii) Είναι $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{x}{\ln x + 1} = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} (\ln x + 1) = 0$ και $\ln x + 1 > 0$ για $x > \frac{1}{e}$.

Άρα η ευθεία $x = \frac{1}{e}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x + 1} = 0 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 0x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x + 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(\ln x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

iv) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = e$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon : y - f(e) = f'(e)(x - e) \Rightarrow y = \frac{x + e}{4}$$

η f είναι κοίλη στο $[e, +\infty)$ οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή

$$f(x) \leq \frac{x + e}{4} \Leftrightarrow f(x) - \frac{x + e}{4} \leq 0$$

και το $=$ μόνο για $x = e$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e^+} e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}} = 0$$

Είναι

$$-1 \leq \eta \mu \frac{1}{x - e} \leq 1$$

$$-e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}} \leq e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}} \cdot \eta \mu \frac{1}{x - e} \leq e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow e^+} \left(-e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}} \right) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow e^+} e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}} = 0$ από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \left(e^{\frac{1}{f(x) - \frac{x + e}{4}}} \cdot \eta \mu \frac{1}{x - e} \right) = 0$$

v) $F'(x) = f(x) \geq 1 > 0$ για $x > \frac{1}{e}$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $F''(x) = f'(x)$, οπότε

x	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
F''		-	+
F		↪	↪

ΣΚ
(1, F(1))

vi) Η F είναι κυρτή στο $[1, e]$, οπότε η C_F βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $x = e$ με εξαίρεση το σημείο επαφής

$$y - F(e) = F'(e)(x - e) \Rightarrow y - e = f(e)(x - e) \Rightarrow y = \frac{e}{2}x - \frac{e^2}{2} + e$$

Άρα $F(x) \geq \frac{e}{2}x - \frac{e^2 - 2e}{2}$ για $x \in [1, e]$ και το = για $x = e$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_1^e F(x)dx &> \int_1^e \left(\frac{e}{2}x - \frac{e^2 - 2e}{2} \right) dx = \left[\frac{ex^2}{4} - \frac{e^2 - 2e}{2}x \right]_1^e = \\ &= \left(\frac{e^3}{4} - \frac{e^3 - 2e^2}{2} \right) - \left(\frac{e}{4} - \frac{e^2 - 2e}{2} \right) = \frac{-e^3 + 6e^2 - 5e}{4} \end{aligned}$$

vii) Είναι

$$\begin{aligned} \frac{\int_1^e (xf(x) + F(x))dx - e^2}{x - 1} + \frac{f(e^a - a) - 1}{e - x} = 0 \\ (e - x) \left(\int_1^e (xf(x) + F(x))dx - e^2 \right) + (x - 1)(f(e^a - a) - 1) = 0 \end{aligned}$$

Θέτω

$$h(x) = (e - x) \left(\int_1^e (xf(x) + F(x))dx - e^2 \right) + (x - 1)(f(e^a - a) - 1), \quad x \in [1, e]$$

Η h είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως πολυωνυμική

- $h(1) = (e - 1) \left(\int_1^e (xf(x) + F(x))dx - e^2 \right) < 0$
- $h(e) = (e - 1)(f(e^a - a) - 1) > 0$

διότι

- Είναι

$$\begin{aligned} \int_1^e (xf(x) + F(x))dx - e^2 &= \int_1^e (xF(x))' dx = \\ &= \left[xF(x) \right]_1^e - e^2 = eF(e) - F(1) - e^2 = -F(1) \end{aligned}$$

Η F είναι κυρτή στο $[1, e]$, άρα η C_F βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $x = e$

$$F(x) \geq \frac{e}{2}x - \frac{e^2 - 2e}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = e$. Άρα για $x = 1$ είναι

$$F(1) > \frac{e}{2} - \frac{e^2 - 2e}{2} = \frac{3e - e^2}{2} = \frac{e(3 - e)}{2} > 0$$

Συνεπώς $\int_1^e (xf(x) + F(x))dx - e^2 = -F(1) < 0$

- Είναι $e^a \geq a + 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με την ισότητα μόνο για $a = 0$, άρα για $a \neq 0$ ισχύει $e^a - a > 1$

η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$ άρα $f(x) \geq 1$ και το $=$ για $x = 1$.
Επομένως, για $e^a - a > 1$ έχουμε

$$f(e^a - a) > 1 \Leftrightarrow f(e^a - a) - 1 > 0$$

Επειδή $h(1) \cdot h(e) < 0$ από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$ και η h είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού, άρα η ρίζα είναι μοναδική