Άσκηση 83

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $xf'(x) = (x+1)f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = e$, $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\text{ημ}x + x}{f(x)}$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{ημ}x)}{f(-\text{ημ}x)}dx < -\frac{\pi}{6} - 1$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left(2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right) \cdot x^3 - 2 = \left(\displaystyle\int_1^0 tf(t)dt\right) \cdot x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

i) Είναι $xf'(x) = (x+1)f(x)$. Για $x \neq 0$ έχουμε

$$xf'(x) - f(x) = xf(x) \Rightarrow \frac{xf'(x) - (x)'f(x)}{x^2} = \frac{xf(x)}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}$$

Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ άρα έχουμε $g'(x) = g(x)$, οπότε

- Για $x > 0$ είναι $g(x) = c_1 e^x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = c_1 e^x \Rightarrow f(x) = c_1 x e^x$

  και $f(1) = e \Rightarrow c_1 \cdot 1 \cdot e = e \Rightarrow c_1 = 1$

  Άρα $f(x) = xe^x$ για $x > 0$

- Για $x < 0$ είναι $g(x) = c_2 e^x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = c_2 e^x \Rightarrow f(x) = c_2 x e^x$

  και $f(-1) = -\dfrac{1}{e} \Rightarrow c_2(-1)e^{-1} = -\dfrac{1}{e} \Rightarrow c_2 = 1$

  Άρα $f(x) = xe^x$ για $x < 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $x = 0$, συνεπώς $f(0) = \lim\limits_{x \to 0}(xe^x) = 0$ και τελικά $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση: Να αναφερθεί ότι η τιμή $f(0)$ μπορεί να προσδιοριστεί άμεσα από την αρχική σχέση χωρίς τη χρήση της συνέχειας.

Για $x = 0$ η δοσμένη σχέση $xf'(x) = (x+1)f(x)$ δίνει

$$0 \cdot f'(0) = (0+1)f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Η τιμή αυτή επαληθεύει τον τύπο $f(x) = xe^x$ και για $x = 0$, αφού $0 \cdot e^0 = 0$, άρα $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$
			OE		

$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

ΣΚ

$\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}(-e^x) = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty$$

άρα $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

iii) Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\text{ημ}x + x}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{\text{ημ}x}{x}+1\right)}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\text{ημ}x}{x}+1}{e^x} = +\infty$$

διότι

$$\left|\frac{\text{ημ}x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\text{ημ}x}{x} \le \frac{1}{|x|}$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ από Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\text{ημ}x}{x} = 0$$

και $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\text{ημ}x}{x}+1\right) = 0 + 1 = 1 > 0$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ με $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) Είναι

$$\frac{f(\text{ημ}x)}{f(-\text{ημ}x)} = \frac{\text{ημ}x e^{\text{ημ}x}}{-\text{ημ}x e^{-\text{ημ}x}} = -e^{2\text{ημ}x}$$

$e^x \ge x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (με την ισότητα μόνο για $x = 0$), οπότε

$$e^{2\text{ημ}x} > 2\text{ημ}x + 1$$

$$-e^{2\text{ημ}x} < -2\text{ημ}x - 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -e^{2\text{ημ}x}dx < \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\text{ημ}x - 1)dx = \Big[2\text{συν}x - x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} - 1$$

Συνεπώς:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\etaμx)}{f(-\etaμx)}dx < -\frac{\pi}{6} - 1$$

v) Θέτω

$$w(x) = \left(2\int_0^1 f(t)dt\right)x^3 - \left(\int_1^0 tf(t)dt\right)x - 2 = \left(2\int_0^1 f(t)dt\right)x^3 + \left(\int_0^1 tf(t)dt\right)x - 2$$

Η w είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική

- $w(0) = -2 < 0$
- $w(1) = 2\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt - 2 = \int_0^1 (2f(t) + tf(t))dt - 2 =$

  $\int_0^1 (2te^t + t^2e^t)dt - 2 = \int_0^1 (t^2e^t)'dt - 2 = \left[t^2e^t\right]_0^1 - 2 = e - 2 > 0$

Επειδή $w(0)\cdot w(1) < 0$ από Θεώρημα Bolzano η $w(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$

Είναι $w'(x) = 3\left(2\int_0^1 f(t)dt\right)x^2 + \int_0^1 tf(t)dt > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$

αφού $f(t) = te^t$, $tf(t) = t^2e^t \geq 0$ για $t \geq 0$ και το $=$ μόνο για $t = 0$

άρα $\int_0^1 f(t)dt > 0$ και $\int_0^1 tf(t)dt > 0$

Οπότε $w'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \Rightarrow w$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική