Άσκηση 84

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(e^x + \alpha e^{-x})$, όπου $\alpha \in (0, +\infty)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν x_0 η θέση τοπικού ακροτάτου της f, να δείξετε ότι το σημείο $M\,(x_0, f(x_0))$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in (0, +\infty)$ ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.

Έστω $\alpha = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι $2f(0) < f(1) + f(-1)$.

iv) Σημείο $N(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x < 0$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $2\,cm/\sec$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OKN, όπου K η προβολή του N στον άξονα $x'x$ και O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_0 που η τεταγμένη του σημείου N είναι $\ln(e^2 + 1) - 1$.

v) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 2e^{2x} f(x)dx$.

Λύση

i) Είναι $f(x) = \ln(e^x + \alpha e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{e^x - \alpha e^{-x}}{e^x + \alpha e^{-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \alpha e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{\alpha}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} = \alpha \Leftrightarrow 2x = \ln\alpha \Leftrightarrow x = \frac{\ln\alpha}{2}$$

Για το πρόσημο της f' έχουμε:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > \alpha \Leftrightarrow x > \frac{\ln\alpha}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{\ln\alpha}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			OE		

ii) Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\frac{\ln\alpha}{2}$ το

$$f(x_0) = \ln\left(e^{\frac{\ln\alpha}{2}} + \alpha e^{-\frac{\ln\alpha}{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{\alpha} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right) = \ln(2\sqrt{\alpha})$$

iii) Είναι $M\left(\frac{\ln\alpha}{2}, \ln 2\sqrt{\alpha}\right)$

Θέτω $\begin{cases} x = \dfrac{\ln\alpha}{2} \\ y = \ln 2\sqrt{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\ln\alpha}{2} \\ y = \ln 2 + \dfrac{\ln\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \ln 2 + x \ , \ x \in \mathbb{R}$

Άρα, το σημείο M ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = x + \ln 2$

iv) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Από ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 1)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = f(0) - f(-1) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0)$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$f(0) - f(-1) < f(1) - f(0) \Leftrightarrow 2f(0) < f(1) + f(-1)$$

v) Είναι $E = -\dfrac{1}{2}xf(x)$, $x < 0$ άρα

$$E(t) = -\frac{1}{2}x(t) \cdot f(x(t))$$

$$E'(t) = -\frac{1}{2}x'(t) \cdot f(x(t)) - \frac{1}{2}x(t) \cdot f'(x(t)) \cdot x'(t)$$

$$E'(t) = -\frac{1}{2}x'(t)\left[f(x(t)) + x(t) \cdot f'(x(t))\right]$$

Τη χρονική στιγμή t_0 η τεταγμένη του σημείου N είναι

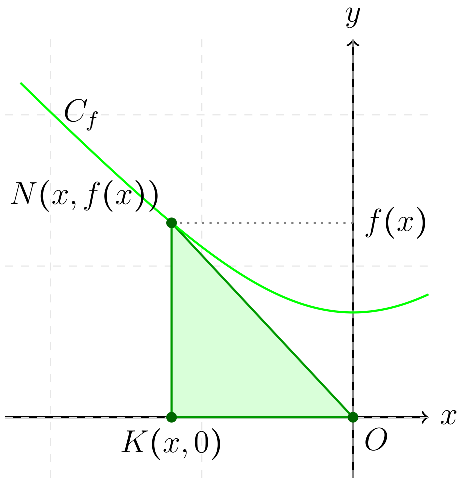
$$y(t_0) = \ln(e^2 + 1) - 1 = \ln(e + e^{-1}) = f(-1) \Rightarrow x(t_0) = -1$$

άρα

$$E'(t_0) = -\frac{1}{2}x'(t_0)[f(x(t_0)) + x(t_0) \cdot f'(x(t_0))]$$

$$E'(t_0) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left[\left(\ln(e^2 + 1) - 1\right) + (-1) \cdot \left(-\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\right)\right]$$

$$E'(t_0) = -\ln(e^2 + 1) + 1 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \; cm^2/\sec$$



vi) Είναι $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} + 1}{e^x}\right) = \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$

$$I = \int_0^1 2e^{2x}\left[\ln(e^{2x} + 1) - x\right]dx = \int_0^1 2e^{2x}\ln(e^{2x} + 1)dx - \int_0^1 2xe^{2x}dx$$

- $$I_1 = \int_0^1 2e^{2x}\ln(e^{2x}+1)dx$$

  Θέτω $u = e^{2x}+1$ οπότε $du = 2e^{2x}dx$ Για $x = 0 \Rightarrow u = 2$ και για $x = 1 \Rightarrow u = e^2+1$

  $$I_1 = \int_2^{e^2+1} \ln u\, du = \Big[u\ln u - u\Big]_2^{e^2+1}$$

  $I_1 = (e^2+1)\ln(e^2+1) - (e^2+1) - (2\ln 2 - 2) = (e^2+1)\ln(e^2+1) - e^2 + 1 - 2\ln 2$

- $$I_2 = \int_0^1 2xe^{2x}dx = \int_0^1 x(e^{2x})'dx = \Big[xe^{2x}\Big]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx$$

  $$I_2 = e^2 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = e^2 - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

Επομένως,

$I = I_1 - I_2 = (e^2+1)\ln(e^2+1) - e^2 + 1 - 2\ln 2 - \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right) = (e^2+1)\ln(e^2+1) - \frac{3e^2-1}{2} - 2\ln 2$