Άσκηση 85

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)-x} = f^2(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

Έστω $\varphi(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να δείξετε ότι τα σημεία καμπής είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $\Gamma(0, -\ln 2)$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\varphi(x)dx$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\varphi(x))\, dx < 0$, όπου $\alpha > 0$.

v) Να αποδείξετε ότι $\left|\displaystyle\int_{-1}^{2} \varphi(x)dx\right| < \dfrac{3}{2}$.

Λύση

i) Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{f(x)-x} = f^2(x) + 1 \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{e^x} = f^2(x) + 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{e^{f(x)}}{f^2(x) + 1}$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$ και $f^2(x_1) + 1 = f^2(x_2) + 1$

διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{e^{f(x_1)}}{f^2(x_1) + 1} = \frac{e^{f(x_2)}}{f^2(x_2) + 1} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται

Θέτω

$$f(x) = y \Rightarrow e^x = \frac{e^y}{y^2 + 1} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{e^y}{y^2 + 1}\right) \Rightarrow$$
$$x = \ln e^y - \ln(y^2 + 1) \Rightarrow x = y - \ln(y^2 + 1)$$

Συνεπώς, $f^{-1}(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, $x \in f(A) = \mathbb{R}$.

ii) Είναι $\varphi(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

$\varphi'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2 + 1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ και $\varphi''(x) = \left(1 - \dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
φ'		$+$	0	$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
φ''		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

ΣΚ ΣΚ

$A(-1, -1 - \ln 2)$ $B(1, 1 - \ln 2)$

Το μέσο των A, B είναι το $M\left(\dfrac{-1+1}{2}, \dfrac{-1 - \ln 2 + 1 - \ln 2}{2}\right) = (0, -\ln 2) = \Gamma$

iii) $I = \int\limits_{-1}^{1} x\varphi(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - x\ln(x^2+1))dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2dx - \int\limits_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$

- $\int\limits_{-1}^{1} x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$
- Για το $J = \int\limits_{-1}^{1} x\ln(x^2+1)dx$, θέτω $u = x^2+1$, οπότε $du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$
  - Για $x = -1 \Rightarrow u = (-1)^2 + 1 = 2$
  - Για $x = 1 \Rightarrow u = 1^2 + 1 = 2$

  Άρα $J = \int_2^2 \frac{1}{2}\ln u\,du = 0$

Τελικά, $I = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

iv) Ισχύει $x^2+1 \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $\ln(x^2+1) \geq 0$ και το = μόνο για $x = 0$. Συνεπώς

$$x - \ln(x^2+1) \leq x \Rightarrow \varphi(x) \leq x \overset{\varphi \text{ γν. αυξ.}}{\Rightarrow} \varphi\left(\varphi(x)\right) \leq \varphi(x) \leq x$$

και το = μόνο για $x = 0$, άρα

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\varphi(x))dx < \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = 0$$

v)
- Είναι $\ln x \leq x - 1$ και το = μόνο για $x = 1$, οπότε

  $$\ln(x^2+1) \leq (x^2+1) - 1 \Rightarrow \ln(x^2+1) \leq x^2$$

  και το = μόνο για $x = 0$, άρα

  $$x - \ln(x^2+1) \geq x - x^2 \Rightarrow \varphi(x) \geq x - x^2$$

  $$\int\limits_{-1}^{2} \varphi(x)dx > \int\limits_{-1}^{2} (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}$$

- Είναι $x^2 + 1 \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $\ln(x^2+1) \geq 0$ και το = μόνο για $x = 0$ οπότε

  $$\varphi(x) = x - \ln(x^2+1) \leq x$$

  $$\int\limits_{-1}^{2} \varphi(x)dx < \int\limits_{-1}^{2} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

άρα

$$-\frac{3}{2} < \int\limits_{-1}^{2} \varphi(x)dx < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left|\int\limits_{-1}^{2} \varphi(x)dx\right| < \frac{3}{2}$$